

22.161.1
1-56

**ЗНАКОМСТВО
С ВЫСШЕЙ
МАТЕМАТИКОЙ**

Л. С. ПОНТЯГИН

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ
И ИХ
ПРИЛОЖЕНИЯ**



ББК 22.161.1
П56
УДК 517.9(023)

Понтрягин Л. С.

П56 Знакомство с высшей математикой: Дифференциальные уравнения и их приложения. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 208 с.

ISBN 5-02-013732-4

Четвертая (последняя) книга из серии небольших научно-популярных книг «Знакомство с высшей математикой». В ней изложение теории дифференциальных уравнений проведено с упором на линейные уравнения с постоянными коэффициентами, с применением этих уравнений к теории электрических цепей. Рассмотрены также автономные системы, положение равновесия в них и предельные циклы с применением к теории регулирования и работе лампового генератора.

Для школьников старших классов, интересующихся математикой, и студентов младших курсов вузов. Может быть полезна преподавателям средней и высшей школы.

П 1702050000—120
053(02)-88 57-88

ББК 22.161.1

ISBN 5-02-013732-4

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1988

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава 1. Введение	7
§ 1. Дифференциальное уравнение первого порядка . .	7
§ 2. Формулировка общей теоремы существования и единственности	15
§ 3. Сведение общей системы дифференциальных урав- нений к нормальной	18
Глава 2. Линейные дифференциальные уравнения . . .	26
§ 4. Доказательство теоремы существования и единст- венности для нормальной системы линейных диф- ференциальных уравнений	26
§ 5. Нормальная система линейных дифференциальных уравнений	32
§ 6. Линейное уравнение n -го порядка	39
Глава 3. Линейные уравнения с постоянными коэффи- циентами	45
§ 7. Комплексные дифференциальные уравнения . . .	45
§ 8. Линейное однородное уравнение с постоянными ко- эффициентами (случай простых корней)	50
§ 9. Линейное однородное уравнение с постоянными ко- эффициентами (случай кратных корней)	58
§ 10. Устойчивые многочлены	66
§ 11. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами	72
§ 12. Метод исключения	78
§ 13. Метод комплексных амплитуд	86
§ 14. Электрические цепи	91
Глава 4. Устойчивость	112
§ 15. Автономные системы дифференциальных уравнений и их фазовые пространства	114
§ 16. Теорема Ляпунова	135

§ 17. Предельные циклы	149
§ 18. Критерий существования предельного цикла . .	155
§ 19. Ламповый генератор	166
§ 20. Центробежный регулятор (исследования Вышне- градского)	175

Краткое жизнеописание Л. С. Понтрягина, составленное им самим	183
--	-----

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга представляет собою переработку моего учебника «Обыкновенные дифференциальные уравнения» (5-е изд. — М.: Наука, 1982) в сторону сильного сокращения и упрощения. При этом сохранены все конкретные применения обыкновенных дифференциальных уравнений, данные в учебнике.

Первое из приложений — электрические цепи — рассмотрено в § 14 главы 3. Даны законы Кирхгофа и правила прохождения электрического тока через простейшие двухполюсники: сопротивление, индуктивность, емкость. На этой основе рассмотрены приборы, имеющие практическое значение: трансформатор и фильтры частот.

Далее рассмотрена работа лампового генератора (глава 4, § 19), являющегося источником незатухающих электрических периодических колебаний. Устанавливается связь между этими колебаниями и предельным циклом Пуанкаре. Были сделаны многочисленные попытки объяснить электрические колебания линейной теорией, но это, естественно, оказалось невозможным. А. А. Андронову принадлежит заслуга обнаружения связи между предельными циклами Пуанкаре и незатухающими электрическими колебаниями.

И, наконец, в § 20 главы 4 дается разработанная Вышнеградским теория регулятора Уатта. Регулятор Уатта появился вместе с паровой машиной как прибор, поддерживающий постоянную скорость работы паровой машины. Работа регулятора Уатта заключается в том, что с увеличением скорости работы паровой машины подача пара уменьшается, а при уменьшении скорости подача пара увеличивается, и таким образом устанавливается стабильная скорость. До

конца XIX столетия регулятор Уатта благополучно справлялся со своей задачей, а в конце XIX столетия он перестал ее выполнять. Вместо того чтобы стабилизировать скорость работы паровой машины, он создавал раскачку этой скорости. Многочисленные усилия многих специалистов выяснить причину этого явления с целью его устранения долгое время не имели успеха. Только в работе Вышнеградского, выдающегося русского инженера (он же был министром финансов), проблема была успешно разрешена. Он дал такую математическую идеализацию регулятора Уатта, из которой очевидным образом выяснилась причина нарушения его работы и дал рекомендацию устранения этой причины. Оказалось, что достаточно повысить трение в регуляторе Уатта, чтобы ликвидировать неустойчивость его работы,

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

Эта глава посвящена определению тех понятий, которые будут изучаться в дальнейшем. Что такое система обыкновенных дифференциальных уравнений, что называется ее решением и как много этих решений существует? Вот те вопросы, формулировка ответов на которые дается в этой главе. Количество решений определяется теоремами существования и единственности, которые в этой книге будут доказаны лишь для частных видов дифференциальных уравнений.

§ 1. Дифференциальное уравнение первого порядка

Дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, в которых неизвестными являются функции одного или нескольких переменных, причем в уравнения входят не только сами функции, но и их производные. Если производные, входящие в уравнение, берутся только по одному переменному, то дифференциальные уравнения называются обыкновенными. Если в уравнениях встречаются производные по нескольким переменным, то уравнения называются уравнениями в частных производных. В этой книге будут рассматриваться только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Так как в ряде физических и технических применений переменным, по которому производится дифференцирование, является время, а его принято обозначать через t , то всюду в дальнейшем это переменное будет обозначаться через t . Неизвестные функции будут обозначаться через x , y , z и т. д. Производные

функций по t будут, как правило, обозначаться точками: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ и т. д. В тех случаях, когда это неудобно или невозможно, мы будем указывать порядок производной верхним индексом в скобках, например $x^{(n)} = \frac{d^nx}{dt^n}$.

Скажем несколько слов о том, как возникают системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых время t является независимым переменным. Состояние многих физических и технических приборов очень часто определяется несколькими величинами. Для выяснения поведения прибора надо выяснить, как эти величины меняются со временем. Закономерность изменения этих величин обычно задается тем, что скорости изменения этих величин, т. е. производные их по t , задаются как функции самих величин. Так возникает система дифференциальных уравнений, описывающая закономерность работы прибора.

Рассмотрим простой пример: движение точки в трехмерном евклидовом пространстве. Координаты точки в этом пространстве обозначим через x^1, x^2, x^3 . Скорости изменения этих координат обозначим через y^1, y^2, y^3 . Состояние движущейся точки определяется этими шестью величинами, именно: геометрическое положение определяется вектором $x = (x^1, x^2, x^3)$, а векторная скорость вектором $y = (y^1, y^2, y^3)$. Здесь $y = \dot{x}$. Производная вектора $x = (x^1, \dots, x^n)$ определяется формулой

$$\dot{x} = (\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n).$$

Закон Ньютона говорит, что векторное ускорение точки, т. е. $\ddot{x} = \dot{y}$, умноженное на массу точки m , равно силе, действующей на точку. Если в данном случае сила, действующая на точку, определяется ее положением в пространстве, т. е. сила является заданной функцией $f(x)$ геометрического положения точки в пространстве, то закон Ньютона записывается следующей формулой:

$$m\dot{y} = f(x).$$

Таким образом, полная система дифференциальных уравнений, описывающая закономерность движения

точки в пространстве, имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \frac{f(x)}{m}.\end{aligned}\tag{1}$$

Эта система уравнений фактически содержит шесть величин $x^1, x^2, x^3, y^1, y^2, y^3$, определяющих состояние движущейся точки в пространстве. Она еще не определяет однозначно эти величины как функции времени t , а выражает физическую закономерность, описывающую движение точки под действием силы. Для того чтобы однозначно определить функции $x(t), y(t)$, нужно еще задать начальное состояние точки в некоторый момент $t = t_0$, т. е. те значения векторов $x = x_0, y = y_0$, которые имеют место при $t = t_0$. Таким образом, движение точки однозначно определяется системой уравнений (1) и начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0.$$

Система уравнений (1) выражает скорости изменения величин $x^1, x^2, x^3, y^1, y^2, y^3$ через эти величины.

Такова общая схема описания работы физического или технического прибора, приводящая к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

В первую очередь мы займемся рассмотрением одного дифференциального уравнения первого порядка, т. е. уравнения, в которое входит лишь первая производная неизвестной функции. Уравнение это может быть записано в виде

$$F(t, x, \dot{x}) = 0.\tag{2}$$

Здесь t — независимое переменное, x — его неизвестная функция, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ — производная функции x , а F — заданная функция трех переменных. Функция F может быть задана не для всех значений ее аргументов; поэтому говорят об области B задания функции F . Здесь имеется в виду множество B точек координатного пространства трех переменных $t, x, \dot{x}$. Решением уравнения (1) называется такая функция $x = \varphi(t)$ независимого переменного t , определенная на некотором интервале $r_1 < t < r_2$ (случаи $r_1 = -\infty, r_2 = +\infty$ не исключаются), что при подстановке ее вместо x в соотношение (2) мы получаем тождество на всем интервале $r_1 < t < r_2$. Интервал $r_1 < t < r_2$

называется интервалом определения решения $\varphi(t)$. Очевидно, что подстановка $x = \varphi(t)$ в соотношение (2) возможна лишь тогда, когда функция $\varphi(t)$ на всем интервале $r_1 < t < r_2$ имеет первую производную (и, в частности, непрерывна). Для того чтобы подстановка $x = \varphi(t)$ в соотношение (2) была возможна, необходимо также, чтобы при произвольном значении переменного t из интервала $r_1 < t < r_2$ точка с координатами $(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ принадлежала множеству B , на котором определена функция F .

Соотношение (2) связывает три переменные величины $t, x, \dot{x}$. В некоторых случаях оно определяет переменное $\dot{x}$ как однозначную неявную функцию независимых переменных t, x . В этом случае дифференциальное уравнение (2) равносильно дифференциальному уравнению вида

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение (3) называется *разрешенным относительно производной*; оно в некоторых отношениях более доступно для изучения, чем общее дифференциальное уравнение (2). Именно уравнения, разрешенные относительно производной, мы и будем теперь рассматривать. Мы не будем уже считать, что соотношение (3) получено в результате разрешения относительно $\dot{x}$ уравнения вида (2), а будем исходить

из функции $f(t, x)$ как из заданной функции двух независимых переменных t, x .

Для того чтобы пользоваться наглядными геометрическими представлениями, мы введем в рассмотрение координатную плоскость P переменных t и x . При этом t как независимое переменное мы будем откладывать по оси абсцисс, а x как зависимое переменное —

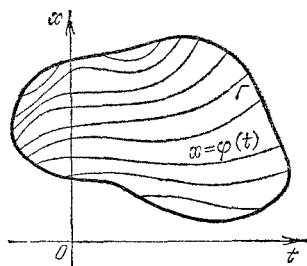


Рис. 1

по оси ординат. Функция f , определяющая дифференциальное уравнение (3), может быть задана не для всех значений своих аргументов t и x , или, говоря геометрическим языком, не во всех точках плоскости P , а лишь в точках некоторого множества Γ плоскости P (рис. 1). Относительно множества Γ мы

в дальнейшем всегда будем предполагать, что оно является открытым. Это значит, что наряду с каждой точкой p в Γ входит и некоторый круг положительного радиуса с центром в p . Относительно функции f будет предполагаться, что как она сама, так и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ являются непрерывными функциями пары переменных t, x на всем множестве Γ . Решение $x = \varphi(t)$ уравнения (3) будем геометрически изображать в плоскости P в виде кривой с уравнением $x = \varphi(t)$. Кривая эта в каждой точке имеет касательную и полностью проходит в открытом множестве Γ ; она называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения (3).

Теорема существования и единственности. Известно, какую большую роль в алгебре играют теоремы, отвечающие на вопрос о том, сколько решений имеет та или другая система алгебраических уравнений. Такова, например, основная теорема алгебры, утверждающая, что многочлен n -й степени всегда имеет ровно n корней (с учетом их кратностей). Точно так же в теории дифференциальных уравнений важным теоретическим вопросом является вопрос о том, насколько много решений имеет дифференциальное уравнение. Оказывается, что каждое дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений, и потому приходится ставить вопрос не о числе решений, а о том, как можно описать совокупность всех решений данного дифференциального уравнения. Ответ на этот вопрос дает теорема существования и единственности (теорема 1), которая в этой книге приводится без доказательства.

Теорема 1. Пусть

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (4)$$

— дифференциальное уравнение, причем функция $f(t, x)$ задана на некотором открытом множестве Γ плоскости P переменных t, x . Пусть функция f и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны на всем открытом множестве Γ . Тогда:

1) для всякой точки (t_0, x_0) множества Γ найдется решение $x = \varphi(t)$ уравнения (4), удовлетворяющее условию

$$\varphi(t_0) = x_0; \quad (5)$$

2) если два решения $x = \psi(t)$ и $x = \chi(t)$ уравнения (4) совпадают хотя бы для одного значения $t = t_0$, т. е. если

$$\psi(t_0) = \chi(t_0),$$

то решения эти тождественно равны для всех тех значений переменного t , для которых они определены.

Числа t_0 , x_0 называются начальными значениями для решения $x = \varphi(t)$, а соотношение (5) — начальным условием для этого решения. Говорят также, что решение $x = \varphi(t)$ удовлетворяет начальному условию (5) или же что оно имеет начальные значения t_0 , x_0 . Утверждение, что решение $x = \varphi(t)$ удовлетворяет начальному условию (5) (или имеет начальные значения t_0 , x_0), предполагает, что интервал $r_1 < t < r_2$ определения решения $x = \varphi(t)$ содержит точку t_0 .

Таким образом, теорема 1 утверждает, что координаты любой точки (t_0, x_0) множества Γ являются начальными значениями для некоторого решения уравнения (5) и что два решения с общими начальными значениями совпадают.

Геометрическое содержание теоремы 1 заключается в том, что через каждую точку (t_0, x_0) множества Γ проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (4) (см. рис. 1).

Говоря, что через каждую точку (t_0, x_0) множества Γ проходит «только одна» интегральная кривая, мы допускаем некоторую неточность. В самом деле, решением уравнения (4) называется функция $x = \varphi(t)$, заданная на вполне определенном интервале $r_1 < t < r_2$. Наряду с этой функцией может существовать функция $x = \psi(t)$, также удовлетворяющая уравнению (4) и имеющая те же начальные значения t_0, x_0 , но заданная на другом интервале $s_1 < t < s_2$. Вторая часть теоремы 1 утверждает лишь, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ совпадают там, где они обе определены, но вовсе не утверждает, что интервалы их определения $r_1 < t < r_2$ и $s_1 < t < s_2$ одинаковы.

Каждое отдельное решение $x = \varphi(t)$ уравнения (4) называется его частным решением.

Каждое решение $x = \varphi(t)$ уравнения (4) мы интерпретировали геометрически в виде графика функции $\varphi(t)$. Дадим теперь геометрическую интерпретацию самого уравнения (4). Через каждую точку (t, x) множества Γ проведем прямую l_t, x с угловым коэффи-

циентом $f(t, x)$. Мы получаем поле направлений, соответствующее уравнению (4), что и дает геометрическую интерпретацию этого уравнения.

Связь между геометрической интерпретацией уравнения и геометрической интерпретацией его решений заключается в том (рис. 2), что любая интегральная кривая $x = \varphi(t)$ в каждой своей точке $(t, \varphi(t))$ касается прямой $l_{t, \varphi(t)}$.

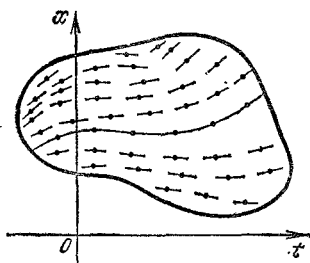


Рис. 2

Примеры

1. Для того чтобы иллюстрировать значение теоремы 1 (в данном случае второй ее части), решим дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \alpha x, \quad (6)$$

где α — действительное число. Здесь

$$f(t, x) = \alpha x,$$

так что функция f в действительности зависит лишь от переменного x . Множество точек, на котором определена функция f , в данном случае совпадает со всей плоскостью P . Как сама функция $f(t, x) = \alpha x$, так и ее производная $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = \alpha$ являются непрерывными функциями переменных t и x во всей плоскости P . Таким образом, к уравнению (6) применима теорема 1. Непосредственной подстановкой в уравнение (6) проверяется, что каждая функция

$$x = ce^{\alpha t}, \quad (7)$$

где c — произвольное действительное число, является решением уравнения (6). Покажем, что, придавая всевозможные значения числу c , мы получим все решения уравнения (6). Пусть $x = \varphi(t)$ — произвольное решение этого уравнения. Покажем, что при надлежащем выборе числа c мы имеем $\varphi(t) = ce^{\alpha t}$. Пусть t_0 — некоторая точка интервала существования решения $\varphi(t)$ и $x_0 = \varphi(t_0)$. Положим $c = x_0 e^{-\alpha t_0}$. Тогда решения $x = \varphi(t)$ и $x = x_0 e^{\alpha(t-t_0)} = x_0 e^{\alpha t} e^{-\alpha t_0} = ce^{\alpha t}$ уравнения (6)

имеют одинаковые начальные значения (t_0, x_0) и потому в силу второй части теоремы 1 совпадают. Таким образом, формула (7) исчерпывает совокупность всех решений дифференциального уравнения (6).

2. Дадим математическое описание процесса распада радиоактивного вещества. Количество вещества, еще не распавшегося к моменту времени t , обозначим через $x(t)$. Из физических соображений следует, что (если нет условий для возникновения цепной реакции) скорость распада, т. е. производная $\dot{x}(t)$, пропорциональна имеющемуся количеству нераспавшегося радиоактивного вещества:

$$\dot{x}(t) = -\beta x(t).$$

Здесь β — постоянный положительный коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств радиоактивного вещества, а знак минус в правой части означает, что $x(t)$ убывает. Мы видим, что функция $x(t)$ удовлетворяет простейшему дифференциальному уравнению, рассмотренному в примере 1, так что

$$x(t) = ce^{-\beta t}.$$

Для определения константы c достаточно указать какие-либо начальные значения. Если, например, известно, что в момент времени $t=0$ имелось количество вещества x_0 , то $c = x_0$, и мы имеем

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t}.$$

Скорость распада выражается здесь величиной β размерности $1/\text{с}$. Часто вместо величины β скорость распада характеризуют так называемым периодом полураспада, т. е. временем, за которое распадается половина имеющегося запаса вещества. Обозначим период полураспада через T и установим связь между величинами β и T . Имеем

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-\beta T},$$

откуда

$$T = \frac{1}{\beta} \ln 2.$$

§ 2. Формулировка общей теоремы существования и единственности

В § 1 было рассмотрено одно дифференциальное уравнение первого порядка, причем была сформулирована теорема существования и единственности для этого уравнения. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений имеет дело и с более общими системами уравнений. Обычно система обыкновенных дифференциальных уравнений состоит из столько же уравнений, сколько в нее входит неизвестных функций; при этом все неизвестные функции являются функциями одного и того же независимого переменного. Во всех случаях теорема существования и единственности является основным теоретическим положением, дающим возможность подойти к изучению данной системы дифференциальных уравнений.

Теорема существования и единственности формулируется и доказывается применительно к системе уравнений, по внешнему виду имеющей несколько частных тип. В действительности же к этой системе уравнений сводятся системы сравнительно общего типа. Системы дифференциальных уравнений того частного типа, о котором здесь идет речь, мы будем называть в дальнейшем нормальными.

Система

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, x^2, \dots, x^n); \quad i = 1, \dots, n,$$

обыкновенных дифференциальных уравнений называется *нормальной*. В этой системе t — независимое переменное, $x^1, \dots, x^n$ — неизвестные функции этого переменного, а $f^1, \dots, f^n$ — функции $n + 1$ переменных, заданные на некотором открытом множестве Γ пространства размерности $n + 1$, в котором координатами точки являются числа $t, x^1, \dots, x^n$.

Эта система в векторном виде может быть переписана следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (8)$$

где $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ — вектор, а $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = (f^1(t, \mathbf{x}), \dots, f^n(t, \mathbf{x}))$ — векторная функция вектора $\mathbf{x}$ и скаляра t .

В дальнейшем всегда будет предполагаться, что функции

$$f^i(t, x^1, x^2, \dots, x^n); \quad i = 1, \dots, n, \quad (9)$$

непрерывны на открытом множестве Γ ; точно так же будет предполагаться, что и их частные производные

$$\frac{\partial f^i(t, x^1, x^2, \dots, x^n)}{\partial x^j}; \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (10)$$

существуют и непрерывны на множестве Γ . Следует заметить, что частные производные (10), непрерывность которых предполагается, берутся только по переменным $x^1, \dots, x^n$, а не по независимому переменному t .

Решением векторного уравнения (8) называется векторная функция

$$x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)), \quad (11)$$

определенная на некотором интервале $r_1 < t < r_2$ и удовлетворяющая уравнению (8). Интервал $r_1 < t < r_2$ называется *интервалом определения* решения (11) (случай $r_1 = -\infty, r_2 = +\infty$ не исключаются). Считается, что векторная функция (11) удовлетворяет уравнению (8), если при подстановке в соотношение (8) вместо вектора x функции (11) соотношение (8) превращается в тождество по t на всем интервале $r_1 < t < r_2$. Для возможности этой подстановки необходимо, чтобы векторная функция (11) имела производную в каждой точке интервала $r_1 < t < r_2$ и чтобы правая часть уравнения (8) была определена для всех подставляемых в нее значений аргументов. Таким образом, точка с координатами

$$t, \varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)$$

должна принадлежать множеству Γ для всех значений t на интервале $r_1 < t < r_2$.

Каждое отдельное решение $x = \varphi(t)$ уравнения (8) называется его *частным решением*.

Дадим теперь формулировку теоремы существования и единственности для нормальной системы (8). Эта теорема будет доказана в настоящей книге только для частного вида уравнений (см. теорему 3).

Теорема 2. Пусть (8) — векторная запись нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, где правые части уравнений (8) определены на некотором открытом множестве Γ , а функции (9) и (10) непрерывны на этом множестве. Тогда для каждой точки

$$t_0, x_0 \quad (12)$$

множества Γ существует решение

$$x = \varphi(t) \quad (13)$$

уравнения (8), определенное на некотором интервале, содержащем точку t_0 и удовлетворяющее условию

$$\varphi(t_0) = x_0. \quad (14)$$

Далее, оказывается, что если имеются два каких-либо решения

$$x = \psi(t),$$

$$x = \chi(t)$$

уравнения (8), удовлетворяющих условиям

$$\psi(t_0) = \chi(t_0) = x_0,$$

причем каждое из этих двух решений определено на своем собственном интервале значений переменного t , содержащем точку t_0 , то решения эти совпадают всюду, где они оба определены. Значения (12) называются начальными значениями решения, а соотношение (14) — начальным условием решения. Таким образом, для начальных значений t_0, x_0 определено решение $\varphi(t, x_0, t_0)$, удовлетворяющее начальному условию

$$\varphi(t_0, x_0, t_0) = x_0.$$

Оказывается, что функция $\varphi(t, x_0, t_0)$ непрерывно зависит от всех трех переменных t, x_0, t_0 , а частные производные $\frac{\partial \varphi^i(t, x_0, t_0)}{\partial x_0^i}$ также непрерывны по аргументам (t, x_0, t_0) . Кроме того, смешанные производные $\frac{\partial^2 \varphi^i(t, x_0, t_0)}{\partial t \partial x_0^i}$ существуют, не зависят от порядка дифференцирования и непрерывны по аргументам t, x_0 .

Таким образом, теорему существования и единственности для нормальной системы кратко можно сформулировать так:

Каковы бы ни были начальные значения (12), всегда существует решение (13) уравнения (8) с этими начальными значениями; определенное на некотором интервале, содержащем точку t_0 . Далее, если имеются два решения с одинаковыми начальными значениями

(12)', каждое из которых определено на своем интервале, содержащем t_0 , то эти решения совпадают на общей части этих интервалов.

§ 3. Сведение общей системы дифференциальных уравнений к нормальной

В предыдущем параграфе была сформулирована теорема существования и единственности для нормальной системы дифференциальных уравнений. Здесь будет показано, каким образом весьма общие системы дифференциальных уравнений сводятся к нормальным системам дифференциальных уравнений и тем самым будет установлена теорема существования и единственности для этих общих систем уравнений.

Дадим сначала понятие о системе дифференциальных уравнений в общем виде.

В случае одной неизвестной функции x независимого переменного t обычно рассматривается одно уравнение, которое можно записать в виде

$$F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0. \quad (15)$$

Здесь t — независимое переменное, x — его неизвестная функция, а F — заданная функция $n + 2$ переменных. Функция F может быть задана не для всех значений ее аргументов, поэтому говорят об области B задания функции F . Здесь имеется в виду открытое множество B координатного пространства размерности $n + 2$, в котором координатами точки являются переменные $t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}$. Если максимальный порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, равен n , то говорят, что имеется уравнение n -го порядка. Решением уравнения (15) называется такая непрерывная функция $x = \varphi(t)$ независимого переменного t , определенная на некотором интервале $r_1 < t < r_2$, что при подстановке ее вместо x в уравнение (15) мы получаем тождество по t на интервале $r_1 < t < r_2$. Очевидно, что подстановка $x = \varphi(t)$ в соотношение (15) возможна лишь тогда, когда функция $\varphi(t)$ на всем интервале своего существования $r_1 < t < r_2$ имеет производные до порядка n включительно. Для того чтобы подстановка $x = \varphi(t)$ в соотношение (15) была возможна, необходимо также, чтобы точка, имеющая координаты $(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \dots, \varphi^{(n)}(t))$, принадлежала множеству

В определения функции F при произвольном t из интервала $r_1 < t < r_2$.

Если имеются две неизвестные функции одного независимого переменного, то рассматриваются два дифференциальных уравнения, вместе образующих систему уравнений. Система эта может быть записана в виде

$$\begin{aligned} F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(m)}, y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}) &= 0, \\ G(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(m)}, y, \dot{y}, \dots, y^{(n)}) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь t — независимое переменное, x и y — две его неизвестные функции, а F и G — две функции, каждая от $m + n + 3$ переменных, заданные в некотором открытом множестве B . Если максимальный порядок производной функции x , входящей в систему (16), равен m , а максимальный порядок производной функции y , входящей в систему (16), равен n , то число m называется порядком системы (16) относительно x , число n — порядком системы (16) относительно y , а число $m + n$ называется *порядком* системы (16). *Решением системы* (16) называется пара непрерывных функций $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, заданных на некотором интервале $r_1 < t < r_2$ и обладающих тем свойством, что при подстановке их в соотношения (16) мы приходим к тождествам по t на всем интервале $r_1 < t < r_2$. Как и в случае одного уравнения, предполагаются выполненными условия, дающие возможность делать подстановку $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ в систему (16).

Аналогично определяются системы дифференциальных уравнений с тремя и большим числом неизвестных функций одного независимого переменного. Если неизвестными функциями системы дифференциальных уравнений являются функции $x^1, \dots, x^n$, а наивысший порядок производной функции x^i , входящей в систему, равен q_i , $i = 1, \dots, n$, то число q_i называется порядком системы относительно x^i , а число $q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$ называется *порядком* системы. Таким образом, нормальная система (8) имеет порядок n .

Если соотношение (15) может быть разрешено относительно $x^{(n)}$, то уравнение (15) переписывается в виде

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}). \quad (17)$$

Точно так же, если система (16) может быть разрешена относительно величин $x^{(m)}$ и $y^{(n)}$, то эта система может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} x^{(m)} &= f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(m-1)}, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}), \\ y^{(n)} &= g(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(m-1)}, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}). \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнение (17) и система (18) называются *разрешенными относительно высших производных*. Аналогично определяются разрешенные относительно высших производных системы с произвольным числом неизвестных функций. В частности, нормальная система (8) является разрешенной относительно высших производных. В дальнейшем мы будем заниматься почти исключительно системами, разрешенными относительно высших производных.

Покажем теперь, что всякая имеющая порядок n система дифференциальных уравнений, разрешенная относительно высших производных, сводится к нормальной системе порядка n . Для начала покажем, как одно уравнение порядка n сводится к нормальной системе порядка n .

А) Пусть

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) \quad (19)$$

— одно дифференциальное уравнение порядка n , разрешенное относительно высшей производной. Здесь t — независимое переменное, y — неизвестная функция переменного t . Далее, $f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ — заданная функция $n+1$ переменных $t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}$, определенная в некотором открытом множестве Γ координатного пространства размерности $n+1$. Относительно функции $f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ мы будем предполагать, что она непрерывна на множестве Γ и что ее частные производные

$$\frac{\partial f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})}{\partial y^{(k)}}; \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

(где предполагается, что $y^{(0)} = y$), также непрерывны на множестве Γ . Для замены уравнения (19) нормальной системой уравнений вводятся новые неизвестные функции $x^1, x^2, \dots, x^n$ независимого переменного t при помощи равенств

$$x^1 = y, \quad x^2 = \dot{y}, \quad \dots, \quad x^n = y^{(n-1)}. \quad (20)$$

дую функцию $x^1, \dots, x^n$ в силу формул (20), получаем уравнение (19) для y .

Так как функция f определена на множестве Γ , то правые части системы (21) также определены на множестве Γ при условии замены координат по формулам (20). Для системы (21) выполнены условия теоремы 2 на множестве Γ . Таким образом, можно произвольно выбрать начальные значения $t_0, x_0^1, \dots, x_0^n$ в множестве Γ . Эти начальные значения в силу замены (20) превращаются в начальные значения

$$t, y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)}$$

для уравнения (19).

Таким образом, предложение А) доказано.

Прием, описанный в предложении А), дает возможность привести к нормальной системе произвольную систему дифференциальных уравнений, разрешенную относительно высших производных. Для того чтобы не загромождать изложения формулами, рассмотрим в нижеследующем предложении В) систему четвертого порядка, состоящую из двух уравнений.

В) Пусть

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= f(t, u, \dot{u}, v, \dot{v}), \\ \ddot{v} &= g(t, u, \dot{u}, v, \dot{v}) \end{aligned} \quad (25)$$

— система двух уравнений второго порядка. Здесь t — независимое переменное, а u и v — его неизвестные функции. Сведем систему (25) к нормальной системе, введя новые неизвестные функции x^1, x^2, x^3, x^4 по следующим формулам:

$$x^1 = u, \quad x^2 = \dot{u}, \quad x^3 = v, \quad x^4 = \dot{v}.$$

При этой замене система (25) переходит в систему

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2, \\ \dot{x}^2 &= f(t, x^1, x^2, x^3, x^4), \\ \dot{x}^3 &= x^4, \\ \dot{x}^4 &= g(t, x^1, x^2, x^3, x^4). \end{aligned} \quad (26)$$

Если предположить, что функции f и g , стоящие в правых частях уравнений (25), определены в некотором открытом множестве Γ пятимерного пространства, где координатами точки служат $t, u, \dot{u}, v, \dot{v}$, причем функции эти непрерывны и имеют непрерывные частные

производные первого порядка по переменным $u, \dot{u}, v, \dot{v}$, то система (26) нормальна и удовлетворяет условиям теоремы 2 на множестве Γ . Отсюда легко следует, что для произвольной точки $t_0, u_0, \dot{u}_0, v_0, \dot{v}_0$ множества Γ существует решение $u = \varphi(t), v = \psi(t)$ системы (25), удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{aligned}\varphi(t_0) &= u_0, & \dot{\varphi}(t_0) &= \dot{u}_0, \\ \psi(t_0) &= v_0, & \dot{\psi}(t_0) &= \dot{v}_0.\end{aligned}$$

Кроме того, два решения с одинаковыми начальными условиями совпадают на общей части их интервалов существования.

Доказательство предложения В) проводится точно так же, как и доказательство предложения А).

Примеры

1. Решим уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (27)$$

где ω — положительная константа.

Непосредственно проверяется, что функция

$$x = r \cos(\omega t + \alpha), \quad r \geq 0, \quad (28)$$

где r и α — постоянные, удовлетворяет этому уравнению. Покажем, что формула (28) охватывает совокупность всех решений. Пусть $x = \varphi(t)$ — произвольное решение уравнения (27). Положим $\varphi(t_0) = x_0, \dot{\varphi}(t_0) = \dot{x}_0$. Непосредственно проверяется, что можно подобрать постоянные r и α таким образом, чтобы имели место равенства $r \cos(\omega t_0 + \alpha) = x_0, -r\omega \sin(\omega t_0 + \alpha) = \dot{x}_0$. Если эти равенства выполнены, то решения (28) и $\varphi(t)$ имеют одинаковые начальные значения $t_0, x_0, \dot{x}_0$ и потому совпадают (см. предложение А)).

Функция (28) описывает гармонический колебательный процесс. Положительная константа r называется амплитудой колебания (28), а α — его начальной фазой или просто фазой. Уравнение (27) называется уравнением гармонических колебаний. Число ω называется частотой колебаний, хотя в действительности число колебаний в секунду определяется формулой

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}.$$

2. Рассмотрим движение точки p массы m по горизонтальной прямой l под действием силы F , притягивающей ее к точке o на той же прямой и пропорциональной расстоянию между точками p и o . Для составления уравнения движения точки p введем на прямой l координату, приняв за начало точку o . Переменную координату точки p обозначим через $x = x(t)$. Тогда в силу второго закона Ньютона уравнение движения точки будет иметь вид

$$m\ddot{x} = F = -kx.$$

Это уравнение обычно записывается в виде

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (29)$$

Физически сила F может быть осуществлена какой-либо пружиной (рис. 3). Число k называется *коэффициентом*

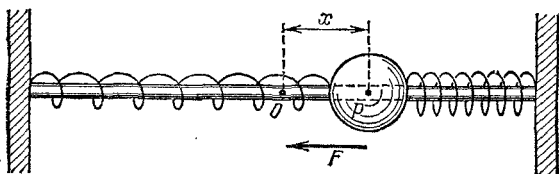


Рис. 3

циентом упругости этой пружины. Согласно формуле (28) решение уравнения (29) имеет вид

$$x = r \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \alpha \right), \quad r \geq 0.$$

Таким образом, частота колебаний $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ точки p определяется ее массой m и упругостью пружины k ; она не зависит от начальных условий. От начальных условий, т. е. от положения x_0 точки p и ее скорости $\dot{x}_0$ в момент t_0 , зависят амплитуда r колебания и его начальная фаза α .

3. Составим и решим приближенно уравнение математического маятника. Математический маятник представляет собой точку p массы m , которая под действием силы тяжести движется по окружности K радиуса l , лежащей в вертикальной плоскости. Величина l называется длиной маятника. На окружности K введем угловую координату, приняв за начало координат самую нижнюю точку o окружности K (рис. 4). Переменную координату точки p обозначим через

$\varphi = \varphi(t)$. Точка p находится под действием силы тяжести $P = mg$, направленной вертикально вниз. Составляющая этой силы, направленная по нормали к окружности, уравнивается благодаря реакции связи (окружности или нити, заставляющей точку двигаться по окружности); составляющая, направленная по касательной к окружности в точке p , равна $-mg \sin \varphi$ (если за положительное направление на касательной принять направление, соответствующее возрастанию угла φ). Таким образом, уравнение движения точки p имеет вид

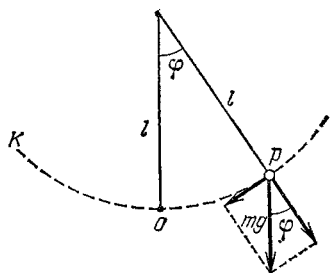


Рис. 4

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi$$

или, иначе,

$$l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0. \quad (30)$$

Уравнение это нелинейно, и его решение представляет большие трудности. Если предположить, что координата φ точки p в процессе движения мало отклоняется от нуля, то приближенно в уравнении (30) можно заменить $\sin \varphi$ на φ и мы получим «приближенное» линейное уравнение маятника

$$l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0.$$

Его решение имеет вид (см. (28))

$$\varphi = r \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha \right).$$

Таким образом, частота «малых колебаний» маятника определяется формулой $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Число ν малых колебаний маятника в секунду определяется формулой

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Например, длина секундного маятника, т. е. маятника, совершающего одно колебание в секунду ($\nu = 1/\text{с}$), определяется формулой

$$l = \frac{g}{4\pi^2} \approx 0,25 \text{ м.}$$

Глава 2

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Система уравнений называется *линейной*, если она линейна относительно неизвестных функций и их производных. В первую очередь для нормальных систем линейных дифференциальных уравнений будет доказана теорема существования и единственности, сформулированная раньше для произвольных уравнений (см. теорему 2).

Далее будет изложена теория линейных уравнений, сначала для нормальной системы n -го порядка, а затем для одного уравнения n -го порядка.

§ 4. Доказательство теоремы существования и единственности для нормальной системы линейных дифференциальных уравнений

Прежде чем сформулировать и доказать теорему существования и единственности для линейных дифференциальных уравнений, докажем две простые оценки. При этом мы будем пользоваться принятым в тензорном исчислении правилом суммирования. Именно: если в одночлене индекс, обозначенный греческой буквой, стоит один раз вверху и один раз внизу, то этот одночлен есть сумма по всем значениям указанного индекса.

А) Пусть $A = \|a_j^i\|$ — квадратная матрица n -го порядка, элементы которой удовлетворяют неравенствам $|a_j^i| \leq K$. Пусть $u = (u^1, \dots, u^n)$ — произвольный n -мерный вектор, а $v = (v^1, \dots, v^n)$ — вектор, задаваемый равенствами

$$v^i = a_\alpha^i u^\alpha; \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Тогда мы имеем неравенство

$$|v| \leq n^2 K |u|. \quad (1)$$

Докажем неравенство (1). Прежде всего, ясно, что $|u^i| \leq \|u\|$. Далее, имеем

$$|v^i| = |a_\alpha^i u^\alpha| \leq n K |u|.$$

Так как $|v| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (v^i)^2}$, то в силу последнего неравенства получаем

$$|v| \leq \sqrt{n (nK)^2 |u|^2} \leq n^2 K |u|.$$

Итак, неравенство (1) доказано.

В) Пусть $z(t)$ — n -мерный вектор, непрерывно зависящий от параметра t . Тогда при $t_0 \leq t_1$ мы имеем неравенство

$$\left| \int_{t_0}^{t_1} z(\tau) d\tau \right| \leq \int_{t_0}^{t_1} |z(\tau)| d\tau. \quad (2)$$

Для доказательства неравенства (2) напомним, что если u_1 и u_2 — два n -мерных вектора, то имеет место соотношение

$$|u_1 + u_2| \leq |u_1| + |u_2|.$$

Это неравенство легко распространить на произвольное число векторов, так что мы имеем

$$|u_1 + u_2 + \dots + u_k| \leq |u_1| + |u_2| + \dots + |u_k|.$$

Воспользуемся теперь определением интеграла и последним неравенством. Мы имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} z(\tau) d\tau = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k-1} z(t_i) (t_{i+1} - t_i).$$

Из этого в силу последнего неравенства следует

$$\left| \int_{t_0}^{t_1} z(\tau) d\tau \right| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k-1} |z(t_i)| (t_{i+1} - t_i) = \int_{t_0}^{t_1} |z(\tau)| d\tau.$$

Таким образом, соотношение (2) доказано.

Теорема 3. Пусть

$$\dot{x}^i = a_\alpha^i(t) x^\alpha + b^i(t); \quad i, \alpha = 1, \dots, n, \quad (3)$$

— нормальная линейная система уравнений, где коэффициенты $a_j^i(t)$ и свободные члены $b^i(t)$ — непрерывные функции независимого переменного t , определенные на некотором интервале $q_1 < t < q_2$ (случаи $q_1 = -\infty$, $q_2 = +\infty$ не исключаются). Тогда для любых начальных значений

$$t_0, \mathbf{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n); \quad q_1 < t_0 < q_2,$$

существует, и притом единственное, решение системы (3) с этими начальными значениями, определенное на всем интервале $q_1 < t < q_2$.

Система уравнений (3) может быть переписана в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t) \mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad (4)$$

где $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$, $\mathbf{b}(t) = (b^1(t), \dots, b^n(t))$ — векторы, $A(t)$ — квадратная матрица порядка n .

Доказательство. Доказательство теоремы 3 будем вести методом последовательных приближений. Для этого введем оператор L , который каждой непрерывной векторной функции $\varphi(t) = (\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t))$, заданной на интервале $q_1 < t < q_2$, ставит в соответствие векторную функцию $\chi(t) = L\varphi(t)$ с помощью формулы

$$\chi(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t [A(\tau) \varphi(\tau) + \mathbf{b}(\tau)] d\tau.$$

Прежде всего, ясно, что операторное уравнение

$$\varphi(t) = L\varphi(t) \quad (5)$$

эквивалентно системе уравнений (3), взятой вместе с начальными условиями $\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0$. Таким образом, для доказательства теоремы 3 нам достаточно решить операторное уравнение (5) и доказать единственность его решения.

Выпишем очевидное равенство. Если φ и ψ — две непрерывные векторные функции, заданные на интервале $q_1 \leq t \leq q_2$, то

$$L\varphi(t) - L\psi(t) = \int_{t_0}^t A(\tau) (\varphi(\tau) - \psi(\tau)) d\tau. \quad (6)$$

Операторное уравнение (5) будем решать методом последовательных приближений. Для этого выберем на интервале $q_1 < t < q_2$ некоторый отрезок $r_1 \leq t \leq r_2$, содержащий начальное значение $t = t_0$, и дадим на этом отрезке следующую оценку.

Пусть $u(t)$ — непрерывная векторная функция, заданная на интервале $q_0 < t < q_1$, а $v(t)$ — непрерывная векторная функция, которая определяется равенством

$$v(t) = \int_{t_0}^t A(\tau) u(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Тогда мы имеем

$$|v(t)| \leq \int_{t_0}^t |A(\tau) u(\tau)| d\tau.$$

Так как на отрезке $r_1 \leq t \leq r_2$ элементы матрицы $a_j^i(t)$ в силу их непрерывности не превосходят некоторой константы K , то в силу неравенства (1)

$$|A(\tau) u(\tau)| \leq n^2 K |u(\tau)|$$

при $r_1 \leq \tau \leq r_2$. Из соотношения (7), неравенства (2) и последнего неравенства следует

$$|v(t)| \leq \int_{t_0}^t |A(\tau) u(\tau)| d\tau \leq n^2 K \int_{t_0}^t |u(\tau)| d\tau. \quad (8)$$

Перейдем теперь к непосредственному применению метода последовательных приближений. Зададим прежде всего на интервале $q_1 < t < q_2$ произвольную векторную функцию $\varphi_0(t)$. Положим

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= L\varphi_0(t), \\ \varphi_{i+1}(t) &= L\varphi_i(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Так как функции $\varphi_0(t)$ и $\varphi_1(t)$ непрерывны, то на отрезке $r_1 \leq t \leq r_2$ имеет место неравенство

$$|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| \leq C. \quad (10)$$

Из равенства (6) и неравенства (8) получаем

$$|\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)| \leq n^2 K \int_{t_0}^t |\varphi_i(\tau) - \varphi_{i-1}(\tau)| d\tau.$$

При $i = 1$ (см. (10)) это дает

$$|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| \leq n^2 K C |t - t_0|.$$

Из этого при $i = 2$ получаем

$$|\varphi_3(t) - \varphi_2(t)| \leq \frac{(n^2 K)^2 C |t - t_0|^2}{2!}.$$

Если допустить, что имеет место оценка

$$|\varphi_i(t) - \varphi_{i-1}(t)| \leq \frac{(n^2 K)^{i-1} C |t - t_0|^{i-1}}{(i-1)!},$$

то

$$|\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)| \leq \frac{(n^2 K)^i C |t - t_0|^i}{i!} \leq \frac{(n^2 K)^i C (r_2 - r_1)^i}{i!}.$$

Так как числа $\frac{(n^2 K (r_2 - r_1))^i C}{i!}$ являются членами сходящегося ряда, то последовательность функции $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ равномерно сходится на отрезке $r_1 \leq t \leq r_2$ к некоторой непрерывной функции $\varphi(t)$, т. е. для всякого положительного числа ε найдется такое настолько большое число i , что

$$|\varphi_i(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$$

на отрезке $r_1 \leq t \leq r_2$. Переходя в соотношении (9) к пределу при $i \rightarrow \infty$, мы получаем $\varphi(t) = L\varphi(t)$. Здесь это верно, так как в силу оценки (8) под знаком оператора L можно переходить к пределу. Итак, существование решения операторного уравнения (5) на отрезке $r_1 \leq t \leq r_2$ доказано. Но так как отрезок этот есть произвольный отрезок, содержащий t_0 и содержащийся в интервале $q_1 < t < q_2$, то функция $\varphi(t)$ построена нами на всем этом интервале. Так как функция $\varphi_{i+1}(t)$ определяется через функцию $\varphi_i(t)$ на всем интервале $q_1 < t < q_2$, то предельная функция $\varphi(t)$ определена и непрерывна на всем этом интервале. Она удовлетворяет операторному уравнению на всем интервале. Итак, существование решения операторного уравнения (5) доказано.

Докажем теперь его единственность. Допустим, что имеются две непрерывные векторные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, удовлетворяющие операторному уравнению (5), так что

$$\varphi(t) = L\varphi(t), \quad \psi(t) = L\psi(t).$$

Так как функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на отрезке $r_1 \leq t \leq r_2$, то разность их $\varphi(t) - \psi(t)$ оценивается на этом отрезке некоторой константой. Именно:

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq C' \quad (11)$$

при $r_1 \leq t \leq r_2$. Так как

$$\varphi(t) - \psi(t) = \int_{t_0}^t A(\tau) (\varphi(\tau) - \psi(\tau)) d\tau,$$

то в силу оценки (8) мы имеем

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq n^2 K \int_{t_0}^t |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| d\tau, \quad (12)$$

или в силу (11)

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq n^2 K C' |t - t_0|.$$

Подставляя эту оценку в правую часть оценки (12), получаем

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \frac{(n^2 K)^2 C' |t - t_0|^2}{2!}.$$

Подставляя эту оценку в правую часть оценки (12), получаем

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \frac{(n^2 K)^3 C'}{2!} \int_{t_0}^t |\tau - t_0|^2 d\tau = \frac{(n^2 K)^3 C' |t - t_0|^3}{3!}.$$

Продолжая это построение дальше, получаем

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \frac{(n^2 K)^s C' |t - t_0|^s}{s!} \leq \frac{(n^2 K)^s C' (r_2 - r_1)^s}{s!}.$$

При $s \rightarrow \infty$ правая часть этого неравенства стремится к нулю. Таким образом, $|\varphi(t) - \psi(t)| = 0$ на отрезке $r_1 \leq t \leq r_2$. Итак, на отрезке $r_1 \leq t \leq r_2$ векторные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ совпадают. Но так как отрезок этот есть произвольный отрезок, содержащийся в интервале $q_1 < t < q_2$ и содержащий t_0 , то решения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ операторного уравнения (5) равны между собой. Итак, теорема 3 доказана.

§ 5. Нормальная система линейных дифференциальных уравнений

Здесь будут установлены некоторые свойства решений системы линейных уравнений

$$\dot{x}^i = a_{\alpha}^i(t) x^{\alpha} + b^i(t); \quad i, \alpha = 1, \dots, n,$$

или, в векторной форме,

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t) \mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad (13)$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{b}(t)$ — n -мерные векторы, $A(t)$ — квадратная матрица порядка n (см. (4)). Вектор $\mathbf{b}(t)$ называется *свободным членом* системы.

В теореме 3 было доказано, что при произвольных начальных условиях $\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0$ решение системы (13) определено на всем интервале $q_1 < t < q_2$, на котором определены и непрерывны вектор $\mathbf{b}(t)$ и матрица $A(t)$. Поэтому мы будем считать, что каждое решение системы (13) задано на этом интервале.

Система (13) называется *однородной*, если вектор $\mathbf{b}(t) \equiv 0$. Каждому линейному уравнению (13) соответствует однородное уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t) \mathbf{x}. \quad (14)$$

А) Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — два решения линейной системы (13), то их разность $\chi(t) = \varphi(t) - \psi(t)$ является решением соответствующей однородной системы (14).

В самом деле, мы имеем

$$\dot{\varphi}(t) = A(t) \varphi(t) + \mathbf{b}(t),$$

$$\dot{\psi}(t) = A(t) \psi(t) + \mathbf{b}(t).$$

Вычитая одно равенство из другого, получаем

$$\dot{\chi}(t) = A(t) \chi(t).$$

В) Всякое решение $\varphi(t)$ неоднородной системы (13) может быть представлено в виде суммы

$$\varphi(t) = \chi(t) + \psi(t),$$

где $\psi(t)$ — некоторое частное решение системы (13), а $\chi(t)$ — специально подобранное решение соответствующей однородной системы.

В самом деле, если $\varphi(t)$ — произвольное решение системы (13), а $\psi(t)$ — некоторое частное решение

системы (13), то разность $\varphi(t) - \psi(t) = \chi(t)$ является решением соответствующей однородной системы ((см. А)).

Из предложения В) следует, что, для того чтобы найти произвольное решение системы (13), достаточно найти некоторое частное его решение $\psi(t)$ и произвольное решение $\chi(t)$ соответствующей однородной системы.

С) Допустим, что свободный член $b(t)$ системы (13) представлен в виде суммы

$$b(t) = c^1 b_1(t) + c^2 b_2(t).$$

Рассмотрим наряду с системой (13) две системы уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + b_1(t) \quad (15)$$

и

$$\dot{x} = A(t)x + b_2(t). \quad (16)$$

Если $x = \varphi_1(t)$ — некоторое частное решение системы (15), а $x = \varphi_2(t)$ — некоторое частное решение системы (16), то очевидно, что

$$x = c^1 \varphi_1(t) + c^2 \varphi_2(t)$$

представляет собой некоторое частное решение системы (13).

Таким образом, если свободный член $b(t)$ системы (13) является линейной формой нескольких векторов

$$b(t) = c^\alpha b_\alpha(t); \quad \alpha = 1, \dots, k,$$

то для нахождения некоторого решения системы (13) достаточно найти частные решения систем со свободными членами $b_1(t), \dots, b_k(t)$.

Решения однородной системы

Д) Установим простейшие свойства уравнения (14),

а) Если $x = \varphi(t)$ — решение уравнения (14), обращающееся в нуль при некотором значении t_0

$$\varphi(t_0) = 0, \quad (17)$$

то решение это тождественно равно нулю:

$$\varphi(t) \equiv 0, \quad q_1 < t < q_2.$$

б) Если

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_r(t)$$

— решения уравнения (14), то векторная функция

$$\varphi(t) = c^\alpha \varphi_\alpha(t),$$

где $c^1, \dots, c^r$ — константы, также является решением уравнения (14).

Свойство б) проверяется непосредственно. Свойство а) вытекает из того, что вектор $x = 0$, тождественно равный нулю, очевидно, является решением уравнения (14), а потому решение $\varphi(t)$, указанное в а), как имеющее с этим решением общее начальное условие (17), должно с ним совпадать в силу теоремы 3.

Е) Пусть

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_r(t) \quad (18)$$

— система решений уравнения (14). Она называется *линейно зависимой*, если существуют такие константы $c^1, c^2, \dots, c^r$, не обращающиеся одновременно в нуль, что

$$\varphi_\alpha(t) c^\alpha \equiv 0.$$

В противном случае система (18) решений уравнения (14) называется *линейно независимой*. Оказывается, что если хотя бы для одного значения $t = t_0$ векторы

$$\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_r(t_0) \quad (19)$$

линейно зависимы, то решения (18) линейно зависимы. Иначе говоря, если система решений (18) линейно независима, то ни при каком значении t_0 векторы (19) не могут быть линейно зависимыми.

Докажем это. Допустим, что векторы (18) линейно зависимы, т. е. что

$$\varphi_\alpha(t_0) c^\alpha = 0,$$

где не все числа $c^1, c^2, \dots, c^r$ равны нулю. Положим

$$\varphi(t) = \varphi_\alpha(t) c^\alpha.$$

В силу предложения D) векторная функция $\varphi(t)$ является решением уравнения (14). В силу того же предложения D) эта функция равна тождественно нулю, так как в точке $t = t_0$ она обращается в нуль.

Перейдем теперь к определению важнейшего для однородных линейных систем понятия фундаментальной системы решений.

Фундаментальная система решений

F) Система

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t) \quad (20)$$

решений уравнения (14) (где n — порядок системы (14)) называется *фундаментальной системой решений*, если она линейно независима (см. Е)). Оказывается, что: а) для уравнения (14) всегда существует фундаментальная система решений; б) если (20) — фундаментальная система решений уравнения (14), то каждое решение $\varphi(t)$ уравнения (14) может быть представлено в виде

$$\varphi(t) = \varphi_\alpha(t) c^\alpha; \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (21)$$

где $c^1, \dots, c^n$ — надлежащим образом подобранные константы.

Докажем, прежде всего, что фундаментальная система решений уравнения (14) существует. Пусть

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

— произвольная система постоянных линейно независимых векторов. Определим решения (20) начальными условиями

$$\varphi_i(t_0) = a_i; \quad i = 1, \dots, n,$$

где t_0 — некоторое значение t . Так как векторы $\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$ по предположению линейно независимы, то в силу предложения Е) решения (20) также линейно независимы, т. е. составляют фундаментальную систему.

Покажем, что каждое решение $\varphi(t)$ может быть записано в виде (21). Пусть t_0 — некоторое значение переменного t ; так как решения (20) линейно независимы, то векторы $\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$ линейно независимы (см. Е)), а так как число их равно размерности рассматриваемого векторного пространства, то они составляют его базис и потому вектор $\varphi(t_0)$ может быть записан в виде

$$\varphi(t_0) = \varphi_\alpha(t_0) c^\alpha; \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (22)$$

где $c^1, \dots, c^n$ — надлежащим образом выбранные константы. Решения $\varphi(t)$ и $\varphi_\alpha(t) c^\alpha$ имеют общее начальное условие (см. (22)) и потому совпадают, так что имеет место равенство (21).

Перейдем теперь к координатному описанию полученных фактов и к установлению некоторых других результатов.

Г) Пусть

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t) \quad (23)$$

— некоторая система решений уравнения (14). Запишем решение $\varphi_k(t)$ в координатной форме, положив

$$\varphi_k(t) = (\varphi_k^1(t), \varphi_k^2(t), \dots, \varphi_k^n(t)).$$

Составим теперь матрицу

$$\Phi(t) = \|\varphi_j^i(t)\|, \quad (24)$$

k -м столбцом которой служит решение $\varphi_k(t)$ системы (14) или, точнее, его координаты. Детерминант этой матрицы обозначим через $W(t)$; он называется *детерминантом Вронского* системы решений (23). Очевидно, что если решения (23) линейно независимы, то детерминант Вронского $W(t)$ не обращается в нуль ни при одном значении t ; в этом случае система (23) является фундаментальной системой решений. Далее, если система (23) линейно зависима, то детерминант Вронского тождественно равен нулю. В случае когда система (23) является фундаментальной, мы будем называть матрицу (24) *фундаментальной матрицей*.

Метод вариации постоянных

Перейдем теперь к изучению неоднородных систем. Пусть

$$\dot{y} = A(t)y + b(t) \quad (25)$$

— векторная запись неоднородной системы (13) и пусть $y = \psi(t)$ — некоторое решение этого уравнения. Наряду с уравнением (25) рассмотрим соответствующее однородное уравнение (14). Из В) следует, что произвольное решение уравнения (25) может быть записано в виде

$$y = \varphi(t) + \psi(t),$$

где $\varphi(t)$ — произвольное решение уравнения (14).

Таким образом, решение неоднородного уравнения (25) сводится к решению однородного уравнения и к отысканию частного решения неоднородного уравне-

ния. Покажем, каким образом, зная фундаментальную систему решений однородного уравнения (14), можно (при помощи квадратур) найти частное решение неоднородного уравнения. Говорят, что решение получается *квадратурами*, если оно может быть записано в виде интегралов от известных функций.

Н) (Метод вариации постоянных.) Пусть

$$\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$$

— фундаментальная система решений однородного уравнения (14). Будем искать решение уравнения (25) в виде

$$y = \varphi_\alpha(t) c^\alpha(t); \quad \alpha = 1, \dots, n,$$

где коэффициентами являются неизвестные функции $c^i(t)$. Подставляя это значение y в уравнение (25), получаем

$$\varphi_\alpha(t) \dot{c}^\alpha(t) + \dot{\varphi}_\alpha(t) c^\alpha(t) = A(t) (\varphi_\alpha(t) c^\alpha(t)) + b(t),$$

откуда, принимая во внимание, что $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ — решения уравнения (14), получаем

$$\varphi_\alpha(t) \dot{c}^\alpha(t) = b(t),$$

или в матричной форме

$$\Phi(t) \dot{c}(t) = b(t). \quad (26)$$

Так как векторы $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ линейно независимы и матрица $\Phi(t)$, составленная из них как из столбцов, имеет детерминант $D(\Phi(t))$, который не обращается в нуль ни при каком значении t , то матрица $\Phi(t)$ имеет обратную матрицу $\Phi^{-1}(t)$:

$$\Phi^{-1}(t) \Phi(t) = E.$$

Таким образом, из соотношения (26) следует

$$\dot{c}(t) = \Phi^{-1}(t) b(t).$$

Отсюда вектор $c(t)$ определяется формулой

$$c(t) = \int \Phi^{-1}(t) b(t) dt = c_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau.$$

Поэтому решение уравнения (25) записывается в виде

$$y(t) = \Phi(t) c_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau. \quad (27)$$

Если $\Phi(t_0) = E$, то последняя формула при $t = t_0$ дает

$$y(t_0) = c_0.$$

Таким образом, c_0 является в этом случае начальным значением y_0 вектора y при $t = t_0$, и формула (27) приобретает вид

$$y(t) = \Phi(t) y_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau.$$

Пример

Докажем, что теорема 2 выполнена для нормальной системы линейных уравнений.

Для этого обозначим через $\varphi_j^i(t)$ фундаментальную систему решений однородных уравнений, где j указывает номер решения. Тогда общее решение $\varphi(t)$ неоднородной системы (13) записывается в виде

$$\varphi(t) = \varphi_\alpha(t) c^\alpha + \psi(t),$$

где $\psi(t)$ — частное решение неоднородной системы (13).

Положим $\Phi(t) = \|\varphi_j^i(t)\|$. Тогда имеет место равенство

$$\varphi(t_0) = \varphi_\alpha(t_0) c^\alpha + \psi(t_0) = x_0.$$

Отсюда

$$c = \Phi^{-1}(t_0) (x_0 - \psi(t_0)).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(t, x_0, t_0) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) (x_0 - \psi(t_0)) + \psi(t).$$

Из этой формулы уже непосредственно следует утверждение теоремы 2. Таким образом, для нормальной системы линейных уравнений теорема 2 полностью доказана.

Матричная запись систем линейных уравнений

В ряде случаев удобно бывает записывать уравнение (14) в матричной форме, при которой неизвестной величиной является фундаментальная матрица уравнения (14). Дадим здесь эту запись.

1) Пусть (20) — фундаментальная система решений уравнения (14), тогда

$$\dot{\phi}_j^t(t) = \alpha_\alpha^t(t) \phi_j^\alpha(t); \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

В матричной форме это соотношение принимает вид

$$\dot{\Phi}(t) = A(t) \Phi(t), \quad (28)$$

где $\dot{\Phi}(t)$ — производная фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ по времени t , т. е. $\dot{\Phi}(t) = \|\dot{\phi}_j^t(t)\|$. Таким образом, фундаментальная матрица $\Phi(t)$ уравнения (14) удовлетворяет матричному уравнению (28); более того, каждое решение матричного уравнения

$$\dot{X} = A(t) X,$$

где X — неизвестная матрица, является фундаментальной матрицей уравнения (14), если только детерминант матрицы X отличен от нуля.

§ 6. Линейное уравнение n -го порядка

Здесь будет рассмотрено линейное уравнение порядка n

$$y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + \dots + a_n(t) y = b(t), \quad (29)$$

коэффициенты $a_i(t)$ и свободный член $b(t)$ которого мы будем предполагать определенными и непрерывными на интервале $q_1 < t < q_2$. Исследование уравнения (29) будет производиться здесь путем его сведения к нормальной системе линейных уравнений по методу, указанному в § 3, А).

Фундаментальная система решений

А) Для сведения уравнения (29) к нормальной линейной системе введем новые неизвестные функции

$$x^1 = y, \quad x^2 = \dot{y}, \quad \dots, \quad x^n = y^{(n-1)}.$$

Эти новые неизвестные функции $x^1, \dots, x^n$ удовлетворяют линейной системе (см. § 3, А))

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2, \\ \dot{x}^2 &= x^3, \\ &\dots \\ \dot{x}^{n-1} &= x^n, \end{aligned} \quad]$$

$$\dot{x}^n = -a_n(t) x^1 - a_{n-1}(t) x^2 - \dots - a_1(t) x^n + b(t).$$

Полученную систему в векторной форме запишем в виде

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad (30)$$

где матрица $A(t)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix}, \quad (31)$$

а вектор $b(t)$ определяется формулой

$$b(t) = (0, 0, \dots, b(t)).$$

Уравнения (29) и (30) эквивалентны между собой; именно: каждому решению $y = \psi(t)$ уравнения (29) соответствует решение

$$x = \varphi(t) = (\psi(t), \dot{\psi}(t), \dots, \psi^{(n-1)}(t))$$

уравнения (30) и, наоборот, каждому решению

$$x = \varphi(t) = (\varphi^1(t), \varphi^2(t), \dots, \varphi^n(t))$$

уравнения (30) соответствует решение

$$y = \varphi^1(t)$$

уравнения (29), причем соответствие это взаимно однозначно. Если решения $\psi(t)$ уравнения (29) и $\varphi(t)$ уравнения (30) соответствуют в указанном смысле друг другу, то мы будем писать

$$\psi(t) \rightleftharpoons \varphi(t).$$

Так как каждое решение $\varphi(t)$ системы (30) определено на всем интервале $q_1 < t < q_2$, то и каждое решение $\psi(t)$ уравнения (29) определено на всем интервале $q_1 < t < q_2$.

В первую очередь изучим однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0. \quad (32)$$

Пусть

$$\dot{x} = A(t)x \quad (33)$$

— соответствующая ему система уравнений, данная в векторной записи, где матрица $A(t)$ определяется формулой (31).

В) Пусть

$$\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_r(t) \quad (34)$$

— некоторая система решений уравнения (32). Непосредственно проверяется, что функция

$$\psi(t) = \psi_\alpha(t) c^\alpha; \quad \alpha = 1, \dots, r,$$

где $c^1, \dots, c^r$ — константы, является решением уравнения (32). Система решений (34) называется *линейно зависимой*, если существуют такие константы $c^1, \dots, c^r$, не обращающиеся одновременно в нуль, что

$$\psi_\alpha(t) c^\alpha \equiv 0. \quad (35)$$

Оказывается, что если

$$\varphi_1(t), \dots, \varphi_r(t) \quad (36)$$

— решения уравнения (33), соответствующие решениям (34):

$$\psi_i(t) \rightleftharpoons \varphi_i(t); \quad i = 1, \dots, r$$

(см. А)), то решения (36) линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы решения (34).

Докажем это. Допустим, что решения (34) линейно зависимы, т. е. имеет место соотношение (35). Выписывая соотношение (35) и те соотношения, которые получаются из него путем дифференцирования, получаем

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(t) c^\alpha &= 0, \\ \dot{\psi}_\alpha(t) c^\alpha &= 0, \\ \ddot{\psi}_\alpha^{(n-1)}(t) c^\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Принимая во внимание, что

$$\varphi_i(t) = (\psi_i(t), \dot{\psi}_i(t), \dots, \psi_i^{(n-1)}(t)),$$

мы видим, что соотношения (37) в векторной записи имеют вид

$$\varphi_\alpha(t) c^\alpha = 0, \quad (38)$$

так что имеет место линейная зависимость и между решениями (36). Допустим, наоборот, что решения (36) линейно зависимы, т. е. что имеет место соотношение (38). Ставя в соотношение (38) вместо каждого вектора $\varphi_i(t)$ его первую компоненту, получаем

соотношение (35), так что решения (34) линейно зависимы.

С) Система решений

$$\psi_1(t), \dots, \psi_n(t) \quad (39)$$

уравнения (32) называется *фундаментальной*, если она линейно независима (обозначениями предусмотрено, что число решений в системе (39) равно порядку уравнения (32)). Оказывается, что фундаментальные системы решений уравнения (32) существуют и что если система (39) является фундаментальной, то каждое решение уравнения (32) может быть записано в виде

$$\psi(t) = \psi_\alpha(t) c^\alpha; \quad \alpha = 1, \dots, n,$$

где $c^1, \dots, c^n$ — константы. Из сказанного видно, что для нахождения всех решений уравнения (32) достаточно найти его фундаментальную систему решений.

Покажем, прежде всего, что фундаментальная система решений уравнения (32) существует. Для этого воспользуемся фактом существования фундаментальной системы решений уравнения (33). Пусть

$$\Phi_1(t), \dots, \Phi_n(t) \quad (40)$$

— фундаментальная система решений уравнения (33) и пусть

$$\psi_1(t), \dots, \psi_n(t) \quad (41)$$

— соответствующие решениям (40) решения уравнения (32):

$$\psi_i(t) \rightleftharpoons \Phi_i(t); \quad i = 1, \dots, n$$

(см. А)). Так как решения (40) линейно независимы, то в силу В) линейно независимы и решения (41) и потому они составляют фундаментальную систему. Допустим теперь, что система (39) является фундаментальной для уравнения (32), и пусть решения (40) соответствуют решениям (39). Пусть, далее, $\psi(t)$ — произвольное решение уравнения (32) и $\Phi(t)$ — соответствующее ему решение уравнения (33). Так как система (39) по предположению фундаментальна, т. е. линейно независима, то соответствующая ей система (33) также линейно независима, т. е. фундаментальна. Таким образом, в силу предложения Е) § 5 получаем

$$\Phi(t) = \Phi_\alpha(t) c^\alpha.$$

Заменяя в этом соотношении каждый вектор его первой компонентой, получаем

$$\psi(t) = \psi_\alpha(t) c^\alpha.$$

Таким образом, предложение С) доказано.

Д) Детерминантом Вронского системы решений (39) уравнения (32) называется детерминант

$$W(t) = \begin{vmatrix} \psi_1(t) & \dots & \psi_n(t) \\ \dot{\psi}_1(t) & \dots & \dot{\psi}_n(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \psi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}. \quad (42)$$

Если решения (40) уравнения (33) соответствуют решениям (39) (см. А)), то детерминант Вронского системы решений (40) уравнения (33) совпадает с детерминантом (42); это видно непосредственно.

Е) Пусть

$$z^{(n)} + a_1(t) z^{(n-1)} + \dots + a_n(t) z = b(t) \quad (43)$$

— неоднородное уравнение и пусть

$$y^{(n)} + a_1(t) y^{(n-1)} + \dots + a_n(t) y = 0 \quad (44)$$

— соответствующее ему однородное уравнение. Из предложения В) § 5 непосредственно следует, что если $\chi(t)$ — частное решение уравнения (43), то произвольное решение уравнения (43) имеет вид

$$z = \psi(t) + \chi(t),$$

где $\psi(t)$ — решение уравнения (44).

Метод вариации постоянных

Ф) Пусть

$$\psi_1(t), \dots, \psi_n(t) \quad (45)$$

— какая-либо фундаментальная система решений уравнения (44). Тогда решение уравнения (43) может быть получено в виде

$$z = \psi_\alpha(t) c^\alpha(t); \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (46)$$

где функции

$$\dot{c}^1(t), \dots, \dot{c}^n(t) \quad (47)$$

получаются как решения системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha}(t) \dot{c}^{\alpha}(t) &= 0, \\ \dot{\psi}_{\alpha}(t) \dot{c}^{\alpha}(t) &= 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \psi_{\alpha}^{(n-2)}(t) \dot{c}^{\alpha}(t) &= 0, \\ \psi_{\alpha}^{(n-1)}(t) \dot{c}^{\alpha}(t) &= b(t).\end{aligned}\tag{48}$$

Так как детерминант системы уравнений (48) относительно неизвестных величин (47) есть детерминант Вронского системы решений (45), то в силу предложения D) он не обращается в нуль ни при одном значении t , и потому из системы уравнений (48) можно определить величины (47), а по ним определяются квадратурами и нужные нам функции

$$c^1(t), \dots, c^n(t).$$

Глава 3

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 7. Комплексные дифференциальные уравнения

До сих пор мы рассматривали лишь действительные уравнения и их действительные решения. Однако в некоторых случаях — например, при решении линейных уравнений с постоянными коэффициентами — бывает легче найти сначала комплексные решения действительного уравнения, а затем уже выделить из них действительные решения. Для изложения этого подхода мы должны ввести понятия комплексной функции действительного переменного и комплексной системы дифференциальных уравнений.

А) Говорят, что задана *комплексная функция* $\chi(t)$ действительного переменного t , если на некотором интервале $q_1 < t < q_2$ каждому значению переменного t поставлено в соответствие комплексное число

$$\chi(t) = \varphi(t) + i\psi(t),$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ являются действительными функциями действительного переменного t . Функция $\varphi(t)$ называется *действительной частью* комплексной функции $\chi(t)$, а функция $\psi(t)$ называется *мнимой частью* комплексной функции $\chi(t)$. Комплексная функция $\chi(t)$ называется *непрерывной*, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны. Точно так же комплексная функция $\chi(t)$ называется *дифференцируемой*, если дифференцируемы функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$; *производная* $\dot{\chi}(t)$ комплексной функции $\chi(t)$ определяется формулой

$$\dot{\chi}(t) = \dot{\varphi}(t) + i\dot{\psi}(t).$$

Непосредственно проверяется, что имеют место обычные правила дифференцирования суммы, произведения и частного двух комплексных функций действительного переменного.

В) Пусть

$$\dot{z}^j = h^j(t, z^1, \dots, z^n); \quad j = 1, \dots, n, \quad (1)$$

— нормальная система дифференциальных уравнений. Относительно функций $h^j(t, z^1, \dots, z^n)$, стоящих в правых частях уравнений, мы предположим, что они определены для комплексных значений переменных $z^1, \dots, z^n$.

В дальнейшем будем предполагать, что функции $h^j(t, z^1, \dots, z^n)$ являются линейными относительно переменных $z^1, \dots, z^n$ с коэффициентами, являющимися действительными или комплексными функциями действительного переменного t , определенными и непрерывными на интервале $q_1 < t < q_2$. При этих условиях вполне законна постановка вопроса об отыскании комплексных решений системы (1). Систему

$$z^j = \chi^j(t); \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

комплексных функций действительного переменного t , заданных на некотором интервале $q_1 < t < q_2$, будем называть *решением* системы (1), если при замене переменных z^j функциями переменного t по формулам (2), мы получим систему тождеств по t на этом интервале. В случае когда правые части уравнений (1) являются линейными относительно $z^1, \dots, z^n$, они определены для всех значений этих переменных. Оказывается, что имеет место следующая теорема существования и единственности для системы (1).

Теорема 4. Пусть

$$t_0, z_0^1, z_0^2, \dots, z_0^n$$

— произвольная система начальных значений, где $z_0^1, \dots, z_0^n$ — произвольные комплексные числа, а t_0 — произвольное действительное число, удовлетворяющее условию $q_1 \leq t_0 \leq q_2$. Тогда существует решение

$$z^j = \chi^j(t); \quad j = 1, \dots, n,$$

системы (1), определенное на всем интервале $q_1 \leq t \leq q_2$ и удовлетворяющее начальным условиям

$$\chi^j(t_0) = z_0^j; \quad j = 1, \dots, n.$$

Всякие два решения с одинаковыми начальными условиями совпадают.

Доказательство. Эта теорема существования и единственности для нормальной линейной системы комплексных уравнений непосредственно вытекает из теоремы 3 после расщепления каждой комплексной неизвестной функции z^j на ее действительную и мнимую части. В самом деле, положим

$$z^j = x^j + iy^j; \quad j = 1, \dots, n,$$

и заменим переменные z^j ; $j = 1, \dots, n$, в системе (1) по этим формулам; тогда будем иметь

$$\dot{x}^j + i\dot{y}^j = f^j(t, x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) + \\ + ig^j(t, x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n), \quad (3)$$

где f^j и g^j — линейные действительные функции действительных аргументов, удовлетворяющие соотношениям

$$f^j(t, x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) + ig^j(t, x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) = \\ = h^j(t, x^1 + iy^1, \dots, x^n + iy^n).$$

Из (3) следует

$$\dot{x}^j = f^j(t, x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n); \quad j = 1, \dots, n, \\ \dot{y}^j = g^j(t, x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n); \quad j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Таким образом, нормальная система (1) комплексных уравнений заменилась нормальной системой (4) действительных уравнений. Так как правые части уравнений (1) являются линейными функциями относительно $z^1, \dots, z^n$, то правые части уравнений (4) являются линейными функциями относительно $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n$. Таким образом, правые части системы (4) определены и удовлетворяют условиям теоремы 3.

Полагая

$$z_0^j = x_0^j + iy_0^j; \quad j = 1, \dots, n, \\ x^j(t) = \varphi^j(t) + i\psi^j(t); \quad j = 1, \dots, n,$$

мы приходим к задаче отыскания решения системы (4) при начальных условиях

$$\varphi^j(t_0) = x_0^j; \quad j = 1, \dots, n, \\ \psi^j(t_0) = y_0^j; \quad j = 1, \dots, n.$$

В силу теоремы 3 решение это существует и единственно. Таким образом, теорема 4 доказана.

Так же как в действительном случае, и в комплексном случае к нормальной системе можно свести довольно общие системы дифференциальных уравнений. Таким образом, мы имеем в комплексном случае предложения, аналогичные предложениям А), В) § 5. Здесь мы дадим только формулировку теоремы существования для одного уравнения n -го порядка.

С) Пусть

$$z^{(n)} = f(t, z, \dot{z}, \dots, z^{(n-1)}) \quad (5)$$

— уравнение порядка n , в котором правая часть является линейной функцией относительно переменных $z, \dot{z}, \dots, z^{(n-1)}$ с коэффициентами, являющимися непрерывными действительными или комплексными функциями переменного t , определенными на интервале $q_1 < t < q_2$. Если теперь $t_0, z_0, \dot{z}_0, \dots, z_0^{(n-1)}$ — произвольные начальные значения, где $z_0, \dot{z}_0, \dots, z_0^{(n-1)}$ — произвольные комплексные числа, а t_0 — действительное число, удовлетворяющее неравенствам $q_1 < t_0 < q_2$, то существует решение $z = \chi(t)$ уравнения (5), определенное на всем интервале $q_1 < t < q_2$ и удовлетворяющее начальным условиям.

$$\chi(t_0) = z_0, \quad \dot{\chi}(t_0) = \dot{z}_0, \dots, \chi^{(n-1)}(t_0) = z_0^{(n-1)}.$$

В дальнейшем важную роль будет играть комплексная функция $e^{\lambda t}$ действительного переменного t , где λ — комплексное число. Дадим здесь определение этой функции и докажем некоторые ее свойства.

Д) Пусть $w = u + iv$ — произвольное комплексное число; положим

$$e^w = e^u (\cos v + i \sin v). \quad (6)$$

Здесь формула (6) служит определением функции e^w . Но в действительности формула (6) может быть доказана. (См.: Понтрягин Л. С. Знакомство с высшей математикой. Анализ бесконечно малых. — М.: Наука, 1980.) Легко видеть, что имеет место соотношение

$$e^{\bar{w}} = \overline{e^w}.$$

Легко доказывается формула

$$e^{w_1} e^{w_2} = e^{w_1 + w_2}.$$

Пусть $\lambda = \mu + iv$ — комплексное число. В силу формулы (6) мы имеем

$$e^{\lambda t} = e^{\mu t} (\cos vt + i \sin vt).$$

Легко доказывается, что для комплексных значений λ имеет место следующая формула дифференцирования:

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}, \quad (7)$$

хорошо известная для действительных значений параметра λ .

Примеры

1. Рассмотрим комплексное уравнение

$$\dot{z} = \lambda z, \quad (8)$$

где $z = x + iy$ — комплексная неизвестная функция действительного переменного t , а $\lambda = \mu + iv$ — комплексное число. Из (7) следует, что

$$z = ce^{\lambda t} \quad (9)$$

есть решение уравнения (8) при произвольной комплексной постоянной c . Покажем, что формула (9) охватывает совокупность всех решений. Для этого воспользуемся теоремой 4. Пусть $z = \chi(t)$ — произвольное решение уравнения (8). В силу теоремы 4 можно считать, что решение это определено для всех значений t . Полагая $\chi(0) = z_0$, мы видим, что решение $z = \chi(t)$ имеет своими начальными значениями числа 0, z_0 . Те же начальные значения имеет, очевидно, и решение

$$z = z_0 e^{\lambda t},$$

получаемое из (9) при $c = z_0$.

Если положить $c = re^{i\alpha}$, где $r \geq 0$ и α — действительные числа, то решение (9) записывается в форме

$$z = re^{\lambda t + i\alpha}. \quad (10)$$

Расщепим теперь уравнение (9) на действительную и мнимую части. Мы имеем

$$\dot{x} + i\dot{y} = (\mu + iv)(x + iy) = (\mu x - vy) + i(vx + \mu y),$$

или

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - vy, \\ \dot{y} &= vx + \mu y. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, система (11) двух действительных уравнений равносильна одному комплексному уравнению (8), и потому произвольное решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ системы (11) связано с произвольным решением (10) уравнения (8) соотношением

$$\varphi(t) + i\psi(t) = re^{i\alpha} = re^{i\omega t} (\cos(\omega t + \alpha) + i \sin(\omega t + \alpha)).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) = re^{i\omega t} \cos(\omega t + \alpha), \\ y &= \psi(t) = re^{i\omega t} \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned} \quad (12)$$

Итак, пользуясь комплексными функциями и уравнениями, мы нашли решение (12) системы (11) действительных уравнений.

§ 8. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами (случай простых корней)

В этом и следующем параграфах будет решено линейное однородное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами, т. е. уравнение

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{z} + a_n z = 0, \quad (13)$$

где z — неизвестная функция независимого переменного t , а коэффициенты $a_1, \dots, a_n$ — постоянные числа (действительные или комплексные). Сначала будут найдены все комплексные решения этого уравнения, а затем (в случае когда коэффициенты $a_1, \dots, a_n$ действительны) из них будут выделены действительные решения. Уравнение (13) можно записать в виде

$$z^{(n)} = -a_1 z^{(n-1)} - \dots - a_{n-1} \dot{z} - a_n z, \quad (14)$$

так что к нему применима теорема существования и единственности (см. теорему 4). В дальнейшем будет использована лишь единственность, так как решения уравнения (14) будут найдены явно и тем самым существование их будет установлено; единственность же будет использована для доказательства того, что найдены все решения.

В инженерных приложениях обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами важную роль играет операционное исчисление. Мы используем здесь символические (или, иначе, операционные) обозначения, лежащие в основе операционного исчисления. Суть этих обозначений заклю-

чается в том, что производная по времени $\dot{z}$ от произвольной функции $z = z(t)$ обозначается не через $\frac{d}{dt}z$, а через pz , так что буква p , стоящая слева от функции, является символом дифференцирования по t . Если позволить себе применить к символу дифференцирования p некоторые алгебраические действия, то мы приходим к обозначению

$$\frac{d^k}{dt^k} z = p^k z.$$

Пользуясь этим обозначением, мы можем написать

$$\begin{aligned} a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{z} + a_n z &= \\ &= a_0 p^n z + a_1 p^{n-1} z + \dots + a_{n-1} p z + a_n z. \end{aligned}$$

Если теперь в правой части последнего равенства позволить себе вынести за скобку функцию z , то мы получаем равенство

$$\begin{aligned} a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{z} + a_n z &= \\ &= (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) z \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к формальному определению.

А) Пусть

$$L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

— произвольный многочлен относительно символа p с постоянными коэффициентами (действительными или комплексными) и z — некоторая действительная или комплексная функция действительного переменного t . Мы имеем

$$L(p) z = a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{z} + a_n z. \quad (15)$$

Если $L(p)$ и $M(p)$ — два произвольных многочлена относительно символа p (или, как говорят, оператора дифференцирования p), а z, z_1, z_2 — функции переменного t , то, как легко видеть, мы имеем тождества

$$\begin{aligned} L(p)(z_1 + z_2) &= L(p)z_1 + L(p)z_2, \\ (L(p) + M(p))z &= L(p)z + M(p)z, \\ L(p)(M(p)z) &= (L(p)M(p))z. \end{aligned}$$

В силу введенных обозначений уравнение (13) может быть записано в виде

$$L(p)z = 0, \quad (16)$$

где

$$L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n.$$

В) Пусть $L(p)$ — произвольный многочлен относительно символа p . Тогда

$$L(p)e^{\lambda t} = L(\lambda)e^{\lambda t}. \quad (17)$$

Докажем формулу (17). Мы имеем

$$pe^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$$

(см. формулу (7)). Из этого следует, что $p^k e^{\lambda t} = \lambda^k e^{\lambda t}$. Отсюда формула (17) вытекает непосредственно (см. (15)).

Из формулы (17) следует, что функция $e^{\lambda t}$ тогда и только тогда является решением уравнения (16), когда число λ есть корень многочлена $L(p)$. Многочлен $L(p)$ называется *характеристическим многочленом* уравнения (16). В том случае, когда он не имеет кратных корней, совокупность всех решений уравнения (16) описывается следующей теоремой.

Теорема 5. *Предположим, что характеристический многочлен $L(p)$ уравнения*

$$L(p)z = 0 \quad (18)$$

(см. (13) и (16)) не имеет кратных корней, и обозначим его корни через

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n.$$

Положим

$$z_1 = e^{\lambda_1 t}, \quad z_2 = e^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad z_n = e^{\lambda_n t}. \quad (19)$$

Тогда при любых комплексных постоянных $c^1, c^2, \dots, c^n$ функция

$$z = c^1 z_1 + c^2 z_2 + \dots + c^n z_n \quad (20)$$

является решением уравнения (18). Решение это является общим в том смысле, что каждое решение уравнения (18) может быть получено по формуле (20) при надлежащем выборе констант $c^1, c^2, \dots, c^n$. При этом константы $c^1, c^2, \dots, c^n$ (называемые постоянными интегрирования) однозначно определяются для каждого данного решения z .

Заметим, что функции (19) определены на всей числовой прямой $-\infty < t < +\infty$.

Доказательство. Из формулы (17) следует, что каждая функция системы (19) является решением уравнения (18), а из того, что уравнение (18) линейно и однородно, вытекает (см. § 5, А)), что при произвольных комплексных константах $c^1, c^2, \dots, c^n$ формула (20) дает решение уравнения (18). Покажем, что если $z_* = z_*(t)$ — произвольное решение уравнения (18), то оно может быть записано в виде (20). В силу теоремы 4 решение z_* определено на всей прямой $-\infty < t < +\infty$. Положим

$$z_*(0) = z_0, \quad \dot{z}_*(0) = \dot{z}_0, \dots, z_*^{(n-1)}(0) = z_0^{(n-1)}.$$

Покажем теперь, что константы $c^1, c^2, \dots, c^n$ можно выбрать так, чтобы и решение $z(t)$, определяемое формулой (20), удовлетворяло тем же начальным условиям

$$z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0, \dots, z^{(n-1)}(0) = z_0^{(n-1)}. \quad (21)$$

Подставляя функцию z из формулы (20) в уравнения (21), получаем

$$c^1 z_1^{(s)}(0) + \dots + c^n z_n^{(s)}(0) = z_0^{(s)}; \quad s = 0, 1, \dots, n-1. \quad (22)$$

Соотношения (22) представляют собой систему из n уравнений относительно неизвестных $c^1, c^2, \dots, c^n$. Для того чтобы система (22) была разрешима, достаточно, чтобы детерминант матрицы

$$\begin{vmatrix} z_1(0) & z_2(0) & \dots & z_n(0) \\ \dot{z}_1(0) & \dot{z}_2(0) & \dots & \dot{z}_n(0) \\ \ddot{z}_1(0) & \ddot{z}_2(0) & \dots & \ddot{z}_n(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(n-2)}(0) & z_2^{(n-2)}(0) & \dots & z_n^{(n-2)}(0) \\ z_1^{(n-1)}(0) & z_2^{(n-1)}(0) & \dots & z_n^{(n-1)}(0) \end{vmatrix} \quad (23)$$

не обращался в нуль.

Непосредственно видно, что матрица (23) имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

и потому ее детерминант (детерминант Вандермонда) отличен от нуля, так как все числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ попарно различны. Однако мы дадим другое (непосредственное) доказательство того, что детерминант матрицы (23) отличен от нуля. Доказательство это в дальнейшем будет обобщено и на случай кратных корней.

Если бы детерминант матрицы (23) обращался в нуль, то существовала бы линейная зависимость между ее строками. Допустим, что эта линейная зависимость имеет место. Это значит, что существуют такие числа $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0$, не обращающиеся одновременно в нуль, что, умножая на них строки матрицы (23) и складывая, получаем нулевую строку. Выписывая k -й член этой нулевой строки, получаем

$$b_{n-1}z_k(0) + b_{n-2}\dot{z}_k(0) + \dots + b_1z_k^{(n-2)}(0) + b_0z_k^{(n-1)}(0) = 0. \quad (24)$$

Если обозначить через $M(p)$ многочлен $b_0p^{n-1} + b_1p^{n-2} + \dots + b_{n-2}p + b_{n-1}$, то соотношение (24) можно записать в виде

$$M(p)z_k|_{t=0} = 0; \quad k = 1, \dots, n.$$

В силу формул (17) и (19) отсюда получаем

$$M(\lambda_k) = 0; \quad k = 1, \dots, n,$$

а это невозможно, так как степень многочлена $M(p)$ не превосходит $n-1$ и потому он не может иметь n различных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_n$. Полученное противоречие показывает, что детерминант системы (22) отличен от нуля, и потому константы $c^1, \dots, c^n$ можно (и притом однозначно) выбрать так, чтобы решения $z_*(t)$ и $z(t)$ удовлетворяли одинаковым начальным условиям. При таком (и только при таком) выборе этих констант решение (20) совпадает с заданным решением $z_*(t)$.

Итак, теорема 5 доказана.

Если коэффициенты многочлена $L(p)$, входящего в уравнение (18), действительны, то возникает вопрос о выделении действительных решений из совокупности (20) всех комплексных решений.

Решение этого вопроса опирается на предложение С), при формулировке и доказательстве которого мы будем пользоваться векторными обозначениями.

С) Пусть

$$z_1, z_2, \dots, z_n \quad (25)$$

— система n линейно независимых комплексных векторов в n -мерном пространстве. Допустим, что система (25) вместе с каждым вектором содержит сопряженный ему вектор. При этих предположениях вектор z , определяемый формулой

$$z = c^1 z_1 + \dots + c^n z_n, \quad (26)$$

тогда и только тогда действителен, когда коэффициенты, стоящие при сопряженных векторах, сопряжены, а коэффициенты, стоящие при действительных векторах, действительны.

Докажем это. Будем предполагать, для определенности, что выполнены соотношения

$$\bar{z}_1 = z_2, \dots, \bar{z}_{2k-1} = z_{2k}, \quad \bar{z}_j = z_j; \quad j = 2k + 1, \dots, n.$$

Тогда вектор z согласно (26) имеет вид

$$z = c^1 z_1 + c^2 z_2 + \dots + c^{2k-1} z_{2k-1} + c^{2k} z_{2k} + \dots + c^{2k+1} z_{2k+1} + \dots + c^n z_n, \quad (27)$$

а вектор $\bar{z}$ — вид

$$\bar{z} = \bar{c}^2 z_1 + \bar{c}^1 z_2 + \dots + \bar{c}^{2k} z_{2k-1} + \bar{c}^{2k-1} z_{2k} + \dots + \bar{c}^{2k+1} z_{2k+1} + \dots + \bar{c}^n z_n. \quad (28)$$

Если

$$c^1 = \bar{c}^2, \dots, c^{2k-1} = \bar{c}^{2k}, c^{2k+1} = \bar{c}^{2k+1}, \dots, c^n = \bar{c}^n, \quad (29)$$

то из равенств (27) и (28) следует, что $\bar{z} = z$, т. е. что вектор z действителен. Если, наоборот, предположить, что вектор z действителен, т. е. что $\bar{z} = z$, то равенства (27) и (28) дают (в силу линейной независимости векторов (25)) систему соотношений (29).

Итак, предложение С) доказано.

Нижеследующее предложение D) дает способ выделения действительных решений из совокупности всех комплексных решений уравнения (18) в случае, когда коэффициенты многочлена $L(p)$ действительны.

D) Допустим, что коэффициенты многочлена $L(p)$ действительны; тогда наряду с каждым комплексным корнем λ многочлен $L(p)$ имеет сопряженный с ним корень $\bar{\lambda}$. Решения $e^{\lambda t}$ и $e^{\bar{\lambda} t}$ уравнения (18) сопряжены между собой (см. § 7, D)). Если же корень λ действителен

телен, то решение $e^{\lambda t}$ действительно. Таким образом, наряду с каждым решением в системе решений (19) имеется также комплексно сопряженное с ним решение. Для того чтобы решение (20) уравнения (18) было действительным, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты, стоящие при комплексно сопряженных решениях, были сопряжены, а коэффициенты при действительных решениях действительны.

Для доказательства обозначим через z_k вектор с координатами $(z_k(0), \dot{z}_k(0), \dots, z_k^{(n-1)}(0))$ и через z — вектор с координатами $(z_0, \dot{z}_0, \dots, z_0^{(n-1)})$. Тогда соотношения (22) принимают вид

$$c^\alpha z_\alpha = z; \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Векторы $z_1, \dots, z_n$ линейно независимы, так как детерминант матрицы (23) отличен от нуля. Таким образом, необходимость приведенного в D) условия следует непосредственно из C). С другой стороны, если это условие выполнено, то решение (20) действительно. В самом деле, если λ_1 и λ_2 — два комплексно сопряженных корня, а c^1 и c^2 — две комплексно сопряженные константы, то функции $c^1 e^{\lambda_1 t}$ и $c^2 e^{\lambda_2 t}$ комплексно сопряжены, а следовательно, их сумма действительна.

Итак, предложение D) доказано.

Примеры

1. Найдем все комплексные решения уравнения

$$\ddot{z} - 3\dot{z} + 9z + 13z = 0.$$

Его можно записать в виде (18), где

$$L(p) = p^3 - 3p^2 + 9p + 13.$$

Непосредственно проверяется, что $p = -1$ есть корень характеристического многочлена $L(p)$. Разделив $L(p)$ на $p + 1$, получаем

$$L(p) = (p + 1)(p^2 - 4p + 13),$$

откуда находим еще два корня $2 \pm 3i$. Таким образом, корнями многочлена $L(p)$ являются числа

$$\lambda_1 = 2 + 3i, \quad \lambda_2 = 2 - 3i, \quad \lambda_3 = -1,$$

В силу теоремы 5 общее комплексное решение рассматриваемого уравнения имеет вид

$$z = c^1 e^{(2+3i)t} + c^2 e^{(2-3i)t} + c^3 e^{-t}.$$

В нижеследующих примерах 2 и 3 даются два общих правила выделения действительных решений. Правила эти непосредственно вытекают из предложения D).

2. Будем считать, что система решений (19) удовлетворяет условиям

$$\bar{z}_1 = z_2, \dots, \bar{z}_{2k-1} = z_{2k}, \bar{z}_{2k+1} = z_{2k+1}, \dots, \bar{z}_n = z_n, \quad (30)$$

и положим

$$z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_{2k-1} = x_k + iy_k,$$

где $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ — действительные функции. Будем, далее, считать, что числа $c^1, c^2, \dots, c^n$ удовлетворяют условиям (29), и положим

$$c^1 = \frac{1}{2}(a^1 - ib^1), \dots, c^{2k-1} = \frac{1}{2}(a^k - ib^k),$$

где $a^1, \dots, a^k, b^1, \dots, b^k$ — действительные числа. При этих обозначениях общее действительное решение уравнения (18) согласно D) записывается в виде

$$z = a^1 x_1 + b^1 y_1 + \dots + a^k x_k + b^k y_k + \\ + c^{2k+1} z_{2k+1} + \dots + c^n z_n,$$

где

$$a^1, b^1, \dots, a^k, b^k, c^{2k+1}, \dots, c^n$$

суть произвольные действительные числа.

3. Опять будем считать, что решения (19) удовлетворяют условиям (30); положим

$$\lambda_1 = \mu_1 + i\nu_1, \dots, \lambda_{2k-1} = \mu_k + i\nu_k.$$

При допущении, что числа $c^1, c^2, \dots, c^n$ удовлетворяют условиям (29), мы можем положить

$$c^1 = \frac{1}{2} \rho_1 e^{i\alpha_1}, \dots, c^{2k-1} = \frac{1}{2} \rho_k e^{i\alpha_k}.$$

В этих обозначениях каждое действительное решение z согласно D) записывается в виде

$$z = \rho_1 e^{\mu_1 t} \cos(\nu_1 t + \alpha_1) + \dots + \rho_k e^{\mu_k t} \cos(\nu_k t + \alpha_k) + \\ + c^{2k+1} e^{\lambda_{2k+1} t} + \dots + c^n e^{\lambda_n t}.$$

Здесь $\bar{\rho}_1, \dots, \bar{\rho}_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k, c^{2k+1}, \dots, c^n$ — произвольные действительные константы. Из последней записи видно, что каждая мнимая часть $\nu_j \neq 0$ корня λ_j придает решению колебательный характер с частотой ν_j , а каждая действительная часть μ_j корня λ_j дает ему либо рост (при $\mu_j > 0$), либо убывание (при $\mu_j < 0$).

4. Используя результаты примеров 2 и 3, мы можем записать все действительные решения уравнения, рассмотренного в примере 1, в двух следующих формах:

$$z = a^1 e^{2t} \cos 3t + b^1 e^{2t} \sin 3t + c^3 e^{-t},$$

$$z = \rho_1 e^{2t} \cos(3t + \alpha_1) + c^3 e^{-t}.$$

§ 9. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами (случай кратных корней)

Если характеристический многочлен

$$L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

уравнения

$$L(p)z = 0 \quad (31)$$

(см. § 8, А)) имеет кратные корни, то среди функций вида $e^{\lambda t}$ нельзя найти n различных решений уравнения (31). Для нахождения в этом случае решений другого вида можно воспользоваться следующим наводящим соображением. Пусть λ_1 и λ_2 — два различных действительных корня характеристического многочлена $L(p)$; тогда функция $\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}$ является решением уравнения (31). Если теперь предположить, что при изменении коэффициентов многочлена $L(p)$ число λ_2 стремится к λ_1 , то это решение переходит (в пределе) в функцию $te^{\lambda_1 t}$, о которой естественно предположить, что она является решением уравнения (33) в случае, если λ_1 есть двукратный корень многочлена $L(p)$. Аналогично мы приходим к догадке, что если λ есть k -кратный корень характеристического многочлена $L(p)$, то решениями уравнения (33) являются все функции

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}.$$

Распространяя эту догадку на случай комплексных кратных корней, мы приходим к предположению о справедливости нижеследующей теоремы (являющейся обобщением теоремы 5).

Теорема 6. Пусть

$$L(p)z = 0 \quad (32)$$

— линейное однородное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами. Пусть, далее, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — совокупность всех попарно различных корней характеристического многочлена $L(p)$ уравнения (32), причем корень λ_j имеет кратность k_j , так что $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Положим

[illegible]

Тогда все функции (33) являются решениями уравнения (32), так что при любых комплексных постоянных $c^1, c^2, \dots, c^n$ функция

$$z = c^a z_a \quad (34)$$

также является решением этого уравнения. Решение это является общим в том смысле, что каждое решение уравнения (32) может быть получено по формуле (34) при надлежащем выборе констант $c^1, \dots, c^n$. При этом константы $c^1, \dots, c^n$ однозначно определяются для каждого данного решения z .

Заметим, что функции (33) определены на всей числовой прямой $-\infty < t < +\infty$.

Доказательству теоремы 6 предположим доказательство формулы смещения.

А) Пусть $L(p)$ — произвольный многочлен, λ — произвольное комплексное число и $f(t)$ — произвольная достаточное число раз дифференцируемая функция. Тогда имеет место следующая важная формула:

$$L(p)(e^{\lambda t}f(t)) = e^{\lambda t}L(p + \lambda)f(t). \quad (35)$$

Докажем формулу (35). Проверим ее сначала для случая $L(p) \equiv p$. Мы имеем

$$p(e^{\lambda t} f(t)) = \lambda e^{\lambda t} f(t) + e^{\lambda t} p f(t) = e^{\lambda t} (p + \lambda) f(t).$$

Теперь формулу (35) легко проверить для произвольного многочлена первой степени $L(p) = ap + b$. Мы имеем

$$\begin{aligned}(ap + b) e^{\lambda t} f(t) &= ap (e^{\lambda t} f(t)) + be^{\lambda t} f(t) = \\ &= ae^{\lambda t} (p + \lambda) f(t) + be^{\lambda t} f(t) = e^{\lambda t} [a(p + \lambda) + b] f(t).\end{aligned}$$

Доказательство формулы (35) в общем случае проведем индуктивно по степени n многочлена $L(p)$. Для $n = 1$ формула, как мы видели, верна. Допустим, что она справедлива для многочлена степени $n - 1$ ($n \geq 2$), и докажем ее для многочлена $L(p)$ степени n . Для этого многочлен $L(p)$ степени n разложим на два множителя: $L(p) = L_1(p) L_2(p)$, где $L_1(p)$ имеет степень 1, а $L_2(p)$ имеет степень $n - 1$. Так как для каждого из многочленов $L_1(p)$ и $L_2(p)$ формула (35) справедлива, то мы имеем (см. § 8, А))

$$\begin{aligned}L(p) (e^{\lambda t} f(t)) &= L_1(p) (L_2(p) (e^{\lambda t} f(t))) = \\ &= L_1(p) (e^{\lambda t} L_2(p + \lambda) f(t)) = e^{\lambda t} L_1(p + \lambda) L_2(p + \lambda) f(t) = \\ &= e^{\lambda t} L(p + \lambda) f(t).\end{aligned}$$

Таким образом, формула (35) доказана.

Докажем теперь предложение В), в котором теорема 6 почти полностью содержится.

В) Пусть $L(p)$ — произвольный многочлен относительно символа p и пусть функция $w_r(t)$ действительного переменного t определяется формулой

$$w_r(t) = L(p) t^r e^{\lambda t},$$

где λ — комплексное число. Оказывается, что если λ есть k -кратный корень многочлена $L(p)$, то функции $w_0(t), \dots, w_{k-1}(t)$ тождественно равны нулю. С другой стороны, оказывается, что если функции $w_0(t), w_1(t), \dots, w_{k-1}(t)$ равны нулю хотя бы для одного значения $t = t_0$, т. е. имеют место равенства

$$w_0(t_0) = w_1(t_0) = \dots = w_{k-1}(t_0) = 0, \quad (36)$$

то λ есть корень многочлена $L(p)$ и кратность этого корня не меньше k .

Докажем предложение В).

В силу формулы смещения (см. (35)) имеем

$$w_r(t) = e^{\lambda t} L(p + \lambda) t^r. \quad (37)$$

Допустим сначала, что λ есть k -кратный корень многочлена $L(p)$, т. е. что

$$L(p) = M(p)(p - \lambda)^k.$$

Заменив в этом тождестве p на $p + \lambda$, получим

$$L(p + \lambda) = M(p + \lambda)p^k. \quad (38)$$

Из формул (37) и (38) получаем

$$\omega_r(t) = e^{\lambda t} M(p + \lambda)(p^k t^r) = 0 \quad \text{при } r = 0, 1, \dots, k - 1,$$

так как $p^k t^r = 0$ при $r < k$. Таким образом, первая часть предложения В) доказана.

Допустим теперь, что имеют место соотношения (36). Разлагая $L(p + \lambda)$ по степеням p , получаем

$$L(p + \lambda) = b_0 + b_1 p + \dots + b_{n-1} p^{n-1} + b_n p^n. \quad (39)$$

Из соотношений (37) и (39) получаем

$$\omega_0(t_0) = e^{\lambda t_0} b_0,$$

а это в силу (36) дает

$$b_0 = 0.$$

Допустим теперь, что имеют место равенства

$$b_0 = b_1 = \dots = b_{r-1} = 0, \quad r \leq k - 1, \quad (40)$$

и докажем, что $b_r = 0$. В силу (37), (39) и (40) имеем

$$\omega_r(t_0) = e^{\lambda t_0} r! b_r.$$

В силу (36) из этого следует

$$b_r = 0.$$

Таким образом, $b_0 = b_1 = \dots = b_{k-1} = 0$ и многочлен $L(p + \lambda)$ имеет вид

$$\begin{aligned} L(p + \lambda) &= b_k p^k + \dots + b_n p^n = \\ &= (b_k + \dots + b_n p^{n-k}) p^k = M_1(p) p^k. \end{aligned}$$

Заменив в этом тождестве p на $p - \lambda$, получаем

$$L(p) = M_1(p - \lambda)(p - \lambda)^k,$$

а это показывает, что λ есть корень многочлена $L(p)$, причем кратность его не меньше k .

Таким образом, предложение В) доказано.

Доказательство теоремы 6. Из первой части предложения В) непосредственно следует, что

функции (33), указанные в формулировке теоремы 6, являются решениями уравнения (32). Докажем, что, выбирая надлежащим образом константы $c^1, \dots, c^n$, мы можем получить произвольное решение z_* уравнения (32) по формуле (33).

Пусть z_* — произвольное решение уравнения (32), определенное на некотором интервале $r_1 < t < r_2$, и пусть t_0 — некоторое число из этого интервала. Положим

$$z_*(t_0) = z_0, \quad \dot{z}_*(t_0) = \dot{z}_0, \quad \dots, \quad z_*^{(n-1)}(t_0) = z_0^{(n-1)}.$$

Теперь будем искать такие константы $c^1, \dots, c^n$, чтобы решение z уравнения (32), определяемое формулой (34), удовлетворяло тем же начальным условиям, что и заданное решение z_* . Тогда будем иметь $z = z_*$ (на интервале $r_1 < t < r_2$) в силу теоремы 4. Для определения констант $c^1, \dots, c^n$ мы получаем систему уравнений

$$c^1 z_1^{(s)}(t_0) + c^2 z_2^{(s)}(t_0) + \dots + c^n z_n^{(s)}(t_0) = z_0^{(s)}; \\ s = 0, 1, \dots, n-1. \quad (41)$$

Для того чтобы система (41) была разрешима, достаточно, чтобы детерминант матрицы

$$\begin{vmatrix} z_1(t_0) & z_2(t_0) & \dots & z_n(t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(s)}(t_0) & z_2^{(s)}(t_0) & \dots & z_n^{(s)}(t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(n-1)}(t_0) & z_2^{(n-1)}(t_0) & \dots & z_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} \quad (42)$$

был отличен от нуля. Покажем, что этот детерминант не равен нулю. Для этого покажем, что строки матрицы (42) линейно независимы. Допустим противное, и пусть $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0$ — те константы, не обращающиеся одновременно в нуль, на которые следует умножить первую, вторую и т. д. строки матрицы для того, чтобы сумма их была равна нулю. Выписывая сумму элементов j -го столбца, получаем равенство

$$b_0 z_j^{(n-1)}(t_0) + b_1 z_j^{(n-2)}(t_0) + \dots \\ \dots + b_{n-2} \dot{z}_j(t_0) + b_{n-1} z_j(t_0) = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$M(p) z_j|_{t=t_0} = 0, \quad (43)$$

где $M(p) = b_0 p^{n-1} + b_1 p^{n-2} + \dots + b_{n-2} p + b_{n-1}$. Полученное равенство (43) для $j = 1, \dots, k_1$ дает, что λ_1 есть по меньшей мере k_1 -кратный корень многочлена $M(p)$ (см. предложение В)). Точно так же для $j = k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2$ полученное равенство дает, что λ_2 есть по меньшей мере k_2 -кратный корень многочлена $M(p)$. Совокупность всех равенств (45) приводит нас к выводу, что (с учетом кратностей) многочлен $M(p)$ имеет не менее n корней, а это невозможно, так как его степень не выше чем $n - 1$. Итак, предположение о равенстве нулю детерминанта матрицы (42) привело нас к противоречию, а это значит, что система (41) разрешима (и притом однозначно) относительно неизвестных

$$c^1, c^2, \dots, c^n.$$

Таким образом, теорема 6 полностью доказана.

Отметим одно очевидное следствие теоремы 6.

С) Каждое решение $z(t)$ уравнения (32) может быть записано в виде

$$z(t) = f_1(t) e^{\lambda_1 t} + f_2(t) e^{\lambda_2 t} + \dots + f_m(t) e^{\lambda_m t},$$

где $f_j(t)$ — многочлен степени, не превосходящей числа $k_j - 1$; $j = 1, \dots, m$. При этом многочлены $f_1(t), \dots, f_m(t)$ определены однозначно решением $z(t)$, так как их коэффициенты являются константами $c^1, c^2, \dots, c^n$, которые в силу теоремы 6 определены решением $z(t)$ однозначно.

Если коэффициенты уравнения (32) действительны, то перед нами стоит задача выделения из совокупности комплексных решений уравнения (32) его действительных решений.

Д) Будем считать, что коэффициенты характеристического многочлена $L(p)$ уравнения (32) действительны. Пусть λ — некоторый корень многочлена $L(p)$ кратности k ; тогда при $r = 0, 1, \dots, k - 1$ функция $t^r e^{\lambda t}$ является решением уравнения (32). Если корень λ действительный, то функция $t^r e^{\lambda t}$ действительна, если же корень λ комплексный, то наряду с решением $t^r e^{\lambda t}$ имеется комплексно сопряженное ему решение $t^r e^{\bar{\lambda} t}$, так как $\bar{\lambda}$ есть корень кратности k многочлена $L(p)$. Таким образом, в системе решений (33) наряду с каждым комплексным решением имеется сопряженное с ним решение. Для того чтобы решение (34)

было действительным, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при действительных решениях были действительными, а коэффициенты у попарно сопряженных комплексных решений были попарно сопряжены.

Доказательство предложения D) приводится точно так же, как и доказательство предложения D) § 8, на основе предложения C) § 8.

Примеры

1. Решим уравнение

$$z^{(5)} + 3z^{(4)} + 3z''' + z'' = 0.$$

Уравнение это может быть записано в виде (32), где характеристический многочлен $L(p)$ имеет вид

$$p^5 + 3p^4 + 3p^3 + p^2 = p^2(p+1)^3.$$

Корнями этого многочлена служат числа

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1,$$

имеющие кратности $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Поэтому в силу теоремы 6 система решений (33) для рассматриваемого уравнения имеет вид

$$z_1 = 1, \quad z_2 = t, \quad z_3 = e^{-t}, \quad z_4 = te^{-t}, \quad z_5 = t^2e^{-t}.$$

Общее решение дается формулой

$$z = (c^1 + c^2t) + (c^3 + c^4t + c^5t^2)e^{-t}.$$

2. Решим уравнение

$$z^{(4)} + 2z'' + z = 0.$$

Характеристический многочлен равен $L(p) = (p^2 + 1)^2$, его корнями (двукратными) являются числа $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Общее решение рассматриваемого уравнения записывается в виде

$$z = (c^1 + c^2t)e^{it} + (c^3 + c^4t)e^{-it}.$$

Нижеследующие два примера дают общие правила выделения действительных решений, непосредственно вытекающие из предложения D). Примеры 3 и 4 вполне аналогичны примерам 2 и 3 § 8.

3. В примере 2 § 8 не учитывался конкретный вид решений, а предполагалось лишь, что система реше-

ний $z_1, \dots, z_n$ состоит из попарно сопряженных решений и действительных решений. Поэтому те же рассуждения показывают, что и в случае кратных корней, мы имеем следующее общее правило. В системе (33) следует каждую пару комплексно сопряженных решений заменить действительной и мнимой частями одного из этих решений. Полученная таким образом система функций обладает тем свойством, что любое действительное решение является их линейной комбинацией с действительными коэффициентами.

4. Пусть

$$t^r e^{\lambda t}, \quad t^r e^{\bar{\lambda} t}$$

— два комплексно сопряженных решения из системы (33). В случае действительного решения z часть суммы (34), соответствующая этим решениям, может быть записана в виде

$$z = c t^r e^{(\mu + i\nu)t} + \bar{c} t^r e^{(\mu - i\nu)t}.$$

Положим

$$c = \frac{1}{2} \rho e^{i\alpha}.$$

Тогда мы будем иметь

$$z = \rho t^r e^{\mu t} \cos(\nu t + \alpha). \quad (44)$$

Этим способом можно каждую пару комплексно сопряженных решений, входящих в сумму (34), заменить действительной функцией вида (44), содержащей две произвольные действительные константы ρ и α . Здесь вновь, как и в примере 3 § 8, видно, что наличие мнимой части $\nu \neq 0$ корня λ придает решению колебательный характер, а наличие действительной части $\mu \neq 0$ корня λ вызывает либо возрастание решения (при $\mu > 0$), либо его убывание (при $\mu < 0$). Наконец, кратность корня λ вызывает появление множителя t^r , который также влечет возрастание решения, однако при $t \rightarrow \infty$ и при $\mu < 0$ возрастание решения, вызванное множителем t^r , гораздо меньше, чем убывание, вызванное множителем $e^{\mu t}$, так что при $\mu < 0$ (и любой кратности корня) решение стремится к нулю при возрастании t .

5. Используя результаты примеров 3 и 4, мы можем записать все действительные решения уравнения,

рассмотренного в примере 2, в двух следующих формах:

$$\begin{aligned} z &= (a^1 + a^2 t) \cos t + (b^1 + b^2 t) \sin t, \\ z &= \rho_1 \cos(t + \alpha_1) + \rho_2 t \cos(t + \alpha_2). \end{aligned}$$

§ 10. Устойчивые многочлены

Пусть

$$L(p)z = 0 \quad (45)$$

— линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Вопрос о том, как ведут себя решения этого уравнения при $t \rightarrow +\infty$ (стремятся ли они к нулю, остаются ограниченными или неограниченно возрастают), играет очень важную роль в целом ряде приложений теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В примерах 3 § 8 и 4 § 9 уже отмечалось, что этот вопрос о поведении решений уравнения (45) связан с тем, каковы действительные части корней многочлена $L(p)$. Сформулируем теперь эту связь более точно.

А) Многочлен $L(p)$ называется устойчивым, если все его корни имеют отрицательные действительные части или, говоря геометрическим языком, лежат по левую сторону от мнимой оси плоскости комплексного переменного. Пусть

$$\lambda_j = \mu_j + i\nu_j; \quad j = 1, \dots, m,$$

— все корни многочлена $L(p)$. Если многочлен этот устойчив, то существует такое положительное число α , что

$$\mu_j < -\alpha; \quad j = 1, \dots, m. \quad (46)$$

Мы покажем, что для каждого решения $\varphi(t)$ уравнения (45) в этом случае найдется такое положительное число M , что

$$|\varphi(t)| < Me^{-\alpha t} \quad \text{при } t \geq 0. \quad (47)$$

Эта формула не только показывает, что каждое решение уравнения (45) стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, но и оценивает, насколько быстро это стремление к нулю происходит.

Докажем формулу (47) сначала для произвольного решения z_s ; $s = 1, \dots, n$, уравнения (45), входя-

дающего в систему функций (33) § 9. Мы имеем $z_s = t^r e^{\lambda_j t}$, откуда $\left| \frac{z_s}{e^{-at}} \right| = t^r e^{(\mu_j + a)t}$. Так как число $\mu_j + a$ в силу (46) отрицательно, то функция $t^r e^{(\mu_j + a)t}$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ и потому ограничена при $t \geq 0$. Таким образом, мы имеем

$$\left| \frac{z_s}{e^{-at}} \right| < M_s \quad \text{при} \quad t \geq 0,$$

или, что то же,

$$|z_s| < M_s e^{-at} \quad \text{при} \quad t \geq 0.$$

Если теперь

$$\varphi(t) = c^1 z_1 + c^2 z_2 + \dots + c^n z_n$$

— произвольное решение уравнения (45), то при $t > 0$ имеем

$$|\varphi(t)| \leq (|c^1| \cdot M_1 + |c^2| \cdot M_2 + \dots + |c^n| \cdot M_n) e^{-at} = Me^{-at}.$$

Таким образом, неравенство (47) доказано. Следует отметить, что если хотя бы один из корней λ_j многочлена $L(p)$ имеет положительную действительную часть $\mu_j > 0$, то существует решение $e^{\lambda_j t}$ уравнения (45), неограниченно возрастающее при $t \rightarrow \infty$.

Нахождению различных, по возможности удобных для практического применения условий устойчивости многочленов до сих пор посвящаются многие исследования математиков. Для многочлена второй степени условие устойчивости непосредственно выводится из формулы решения квадратного уравнения (см. В)). Вопрос об устойчивости многочлена произвольной степени n был решен в несколько различных формах математиками Раусом и Гурвицем. Условия Рауса — Гурвица, однако, мало удобны для вычислительной практики, и потому продолжают до сих пор отыскивать новые формулировки условий устойчивости. Здесь будет приведено доказательство критерия Рауса — Гурвица для $n = 3$ и без доказательства будет дано условие устойчивости для произвольной степени n в форме Гурвица.

В) Многочлен второй степени $L(p) = p^2 + ap + b$ с действительными коэффициентами a и b тогда и

только тогда устойчив, когда коэффициенты его положительны.

Это утверждение легко проверяется при помощи формулы решения квадратного уравнения.

С) Если многочлен $L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$ с действительными коэффициентами устойчив, то все его коэффициенты положительны.

Для доказательства разложим многочлен $L(p)$ на действительные множители первой и второй степени, т. е. на множители вида $p + c$ и $p^2 + ap + b$. Так как многочлен $L(p)$ устойчив, то и каждый множитель указанного вида, входящий в его состав, также устойчив. Для устойчивости множителя $p + c$ необходимо, чтобы число c было положительно, а для устойчивости множителя $p^2 + ap + b$ необходимо, чтобы оба числа a , b были положительными. Из положительности коэффициентов множителей легко следует положительность коэффициентов произведения.

Нижеследующая теорема дает критерий устойчивости для многочленов третьей степени.

Теорема 7. Многочлен

$$L(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3, \quad a_0 > 0,$$

с действительными коэффициентами тогда и только тогда устойчив, когда числа a_1 , a_2 , a_3 положительны и, сверх того, выполнено неравенство

$$a_1 a_2 > a_0 a_3.$$

Доказательство. При доказательстве будем рассматривать многочлен

$$L(p) = p^3 + ap^2 + bp + c; \quad (48)$$

случай общего многочлена $L(p)$ легко сводится к этому. В силу предложения С) нам достаточно доказать, что многочлен (48) с положительными коэффициентами a , b , c тогда и только тогда устойчив, когда имеет место неравенство

$$ab > c. \quad (49)$$

При доказательстве мы воспользуемся тем, что корни многочлена (48) являются непрерывными функциями его коэффициентов.

Выясним прежде всего, при каких условиях многочлен (48) имеет чисто мнимые корни, в частности

корень $p = 0$, который также следует считать чисто мнимым, так как он лежит на мнимой оси. Мы имеем

$$L(p) = (p + a)(p^2 + b) - ab + c. \quad (50)$$

Если многочлен $L(p)$ имеет корень 0, то $c = 0$, а это по предположению исключено, так как $c > 0$. Допустим, что корнем многочлена $L(p)$ является число $i\omega$, где $\omega \neq 0$. Если предположить при этом, что число $-\omega^2 + b$ отлично от нуля, то число $(i\omega + a)(-\omega^2 + b)$ имеет отличную от нуля мнимую часть и не может взаимно уничтожаться с действительным числом $-ab + c$. Таким образом, число $i\omega$ лишь тогда может быть корнем многочлена $L(p)$, когда $-\omega^2 + b = 0$; в этом случае мы имеем равенство

$$L(i\omega) = -ab + c = 0.$$

Обратно, если $ab = c$, то в силу (50) многочлен $L(p)$ имеет чисто мнимые корни $p = \pm i\sqrt{b}$. Таким образом, многочлен $L(p)$ (с положительными коэффициентами) тогда и только тогда имеет чисто мнимые корни, когда $ab = c$. В частности, при непрерывном изменении положительных коэффициентов a, b, c корень многочлена $L(p)$ только тогда может пересечь мнимую ось, когда выполнено равенство $ab = c$.

Допустим, что неравенство (49) не выполняется. Тогда либо $ab = c$, либо $ab < c$. В первом случае многочлен $L(p)$ имеет чисто мнимые корни и, следовательно, неустойчив. Покажем, что во втором случае, т. е. при выполнении неравенства

$$ab < c, \quad (51)$$

многочлен $L(p)$ также неустойчив. Будем менять непрерывно коэффициенты a и b , оставляя их положительными, так, чтобы они стремились к нулю и чтобы при этом неравенство (51) не нарушалось. При этом изменении ни один корень не перейдет с одной стороны мнимой оси на другую и, следовательно, свойство многочлена быть устойчивым или неустойчивым не изменится. При $a = b = 0$ получаем многочлен $p^3 + c$, который имеет корни $\sqrt[3]{c} \left(\cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3} \right)$, лежащие по правую сторону мнимой оси. В силу непрерывности зависимости корней от коэффициентов неустойчивость (наличие корней справа от мнимой

оси) сохраняется и при достаточно малых положительных a и b .

Допустим теперь, что неравенство (49) выполнено, и покажем, что многочлен $L(p)$ устойчив. Для этого будем менять коэффициент c так, чтобы он стремился к нулю, оставаясь положительным, и чтобы неравенство (49) при этом не нарушалось. При $c = 0$ мы получаем многочлен

$$L(p) = p(p^2 + ap + b),$$

имеющий один нулевой корень и два корня с отрицательными действительными частями. При малом положительном c эти два корня мало изменятся, так что произведение их останется положительным, а нулевой корень перейдет в малый положительный или отрицательный. Так как произведение всех трех корней равно отрицательному числу $-c$, то корень, близкий к нулю, будет отрицателен.

Итак, теорема 7 доказана.

Для того чтобы формулировать необходимые и достаточные условия устойчивости любого многочлена с действительными коэффициентами, условимся сначала о терминологии. Пусть

$$P = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{vmatrix}$$

— произвольная квадратная матрица порядка n . Будем называть ее *главным k -м минором* детерминант матрицы

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kk} \end{vmatrix};$$

минор этот мы будем обозначать через $\Delta_k(P)$. Таким образом, детерминант $\Delta_k(P)$ составлен из элементов матрицы P , входящих в первые k столбцов и строк.

Теорема 8. Пусть

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 > 0, \quad (52)$$

— произвольный многочлен степени n с действительными коэффициентами. Для того чтобы выяснить во-

прос о его устойчивости, составляют матрицу

$$Q = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}$$

порядка n . Оказывается, что многочлен (52) устойчив тогда и только тогда, когда все главные миноры $\Delta_k(Q)$, $k = 1, \dots, n$, матрицы Q положительны.

Теорема 8 в этой книге доказана не будет. Доказательство ее можно найти, например, в книге: Четаев Н. Г. Устойчивость движения. — М.: Гостехиздат, 1955. — С. 79—83.

Во избежание недоразумений опишем матрицу Q . Столбец матрицы Q , имеющий номер k , таков:

$$\dots a_{k+2} \ a_{k+1} \ a_k \ a_{k-1} \ a_{k-2} \ \dots,$$

где элемент a_k стоит на главной диагонали; при этом элемент a_{k+j} , индекс $k+j$ которого отрицателен или больше n , считается равным нулю.

Примеры

1. Выведем из теоремы 8 теорему 7. В случае $n=3$ матрица Q имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Ее три главных минора имеют значения

$$\Delta_1(Q) = a_1, \quad \Delta_2(Q) = a_1 a_2 - a_0 a_3, \quad \Delta_3(Q) = a_3 \Delta_2(Q).$$

Условие их положительности вместе с условием положительности коэффициента a_0 равносильны условиям

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 > a_0 a_3.$$

Из совокупности этих условий вытекает, как легко видеть, положительность коэффициента a_2 . Таким образом, в случае $n=3$ теорема 8 превращается в теорему 7.

2. В случае $n=4$ матрица Q имеет вид

$$Q = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Ее главные миноры имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}\Delta_1(Q) &= a_1, \quad \Delta_2(Q) = a_1 a_2 - a_0 a_3, \\ \Delta_3(Q) &= a_3 \Delta_2(Q) - a_1^2 a_4; \quad \Delta_4(Q) = a_4 \Delta_3(Q).\end{aligned}$$

Условие положительности этих миноров вместе с условием $a_0 > 0$ эквивалентно, как легко видеть, условиям

$$\begin{aligned}a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \\ \Delta_3(Q) &= a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0.\end{aligned}$$

§ 11. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

Здесь будет дано решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами со свободным членом специального вида, являющимся так называемым квазимногочленом.

А) *Квазимногочленом* будем называть всякую функцию $F(t)$, которую можно записать в виде

$$F(t) = f_1(t) e^{\lambda_1 t} + f_2(t) e^{\lambda_2 t} + \dots + f_m(t) e^{\lambda_m t}, \quad (53)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — некоторые комплексные числа, а $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$ — многочлены от t . Из предложения В) § 9 следует, что каждое решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами является квазимногочленом. Можно доказать, что и, наоборот, каждый квазимногочлен является решением некоторого линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Если какие-нибудь два числа последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ совпадают между собой, например если $\lambda_1 = \lambda_2$, то члены суммы (53), соответствующие этим числам, можно объединить и заменить членом $(f_1(t) + f_2(t)) e^{\lambda_1 t}$. Таким образом, запись (53) всегда можно привести к такому виду, что числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, входящие в нее, попарно различны. Отметим, что сумма и произведение двух произвольных квазимногочленов также есть квазимногочлен; далее, если к произвольному квазимногочлену применить произвольный оператор $L(p)$, то мы вновь получим квазимногочлен.

Таким образом, в настоящем параграфе будет рассматриваться уравнение

$$L(p) z = F(t), \quad (54)$$

где $F(t)$ — некоторый квазимногочлен. Наряду с уравнением (54) рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$L(p)u = 0. \quad (55)$$

Нижеследующее предложение непосредственно вытекает из замечания В) § 5.

В) Если $\hat{z}$ — произвольное частное решение уравнения (54), то произвольное решение z того же уравнения может быть записано в виде

$$z = \hat{z} + u,$$

где u — некоторое решение уравнения (55).

Так как произвольное решение однородного уравнения мы отыскивать уже умеем, то дело сводится, таким образом, к отысканию одного частного решения уравнения (54) в случае, когда $F(t)$ есть квазимногочлен. Так как, далее, каждый квазимногочлен записывается в виде (53), то в силу замечания С) § 9 дело сводится к отысканию частного решения уравнения (54) в случае, когда $F(t) = f(t)e^{\lambda t}$, где $f(t)$ — многочлен. Для этого случая решение отыскивается в нижеследующей теореме.

Во избежание недоразумений отметим, что в дальнейшем под многочленом степени r мы будем понимать функцию вида $a_0 t^r + a_1 t^{r-1} + \dots + a_{r-1} t + a_r$, не предполагая непременно, что старший коэффициент a_0 отличен от нуля.

Теорема 9. *Рассмотрим неоднородное уравнение*

$$L(p)z = f(t)e^{\lambda t}, \quad (56)$$

в котором $f(t)$ — многочлен степени r относительно t , а λ — комплексное число. Пусть $k = 0$, если $L(\lambda) \neq 0$, и k — кратность корня λ , если $L(\lambda) = 0$. Тогда существует частное решение уравнения (56), имеющее вид

$$z = t^k g(t) e^{\lambda t}, \quad (57)$$

где $g(t)$ — многочлен степени r относительно t . Коэффициенты многочлена $g(t)$ можно найти методом неопределенных коэффициентов.

Доказательство. Положим

$$f(t) = a_0 t^r + f^*(t) \quad (58)$$

и будем искать многочлен $g(t)$ в виде

$$g(t) = b_0 t^r + g^*(t), \quad (59)$$

где многочлены $f^*(t)$ и $g^*(t)$ имеют степень $r - 1$. Далее, в силу выбора числа k имеем

$$L(p) = M(p)(p - \lambda)^k, \quad (60)$$

где $M(\lambda) \neq 0$. Для того чтобы функция (57) являлась решением уравнения (56), должно быть выполнено условие (см. § 9, А))

$$L(p) e^{\lambda t} t^k g(t) = e^{\lambda t} L(p + \lambda) t^k g(t) = c^{\lambda t} f(t),$$

т. е. многочлен $g(t)$ должен удовлетворять условию

$$L(p + \lambda) t^k g(t) = f(t). \quad (61)$$

Многочлен $M(p + \lambda)$ имеет своим свободным членом число $M(\lambda) \neq 0$ и потому может быть записан в виде

$$M(p + \lambda) = M(\lambda) + M^*(p)p, \quad M(\lambda) \neq 0. \quad (62)$$

Принимая во внимание соотношения (58), (59), (60) и (62), мы можем теперь записать условие (61), накладываемое на многочлен $g(t)$, в виде

$$b_0 M(\lambda) p^k t^{k+r} + b_0 M^*(p) p^{k+1} t^{k+r} + L(p + \lambda) t^k g^*(t) = a_0 t^r + f^*(t). \quad (63)$$

Приравнивая члены, содержащие t^r , в равенстве (11), получаем соотношение

$$b_0 M(\lambda) p^k t^{k+r} = a_0 t^r, \quad (64)$$

из которого коэффициент b_0 искомого многочлена $g(t)$ определяется (ибо $M(\lambda) \neq 0$), и притом однозначно. Будем считать теперь, что коэффициент b_0 уже выбран, так что соотношение (64) выполнено; тогда соотношение (63) принимает вид

$$L(p + \lambda) t^k g(t) = f^*(t) - b_0 M^*(p) p^{k+1} t^{k+r}, \quad (65)$$

где в правой части равенства стоит известный многочлен степени $r - 1$, а слева — неизвестный многочлен $g^*(t)$ степени $r - 1$. Уравнение (65) отличается от уравнения (61) только степенью входящих в него многочленов, которая понизилась на единицу. Повторяя для уравнения (65) вычисления, проведенные ранее для уравнения (61), мы вычислим коэффициент b_1 при высшей, т. е. $(r - 1)$ -й, степени t многочлена $g^*(t)$. Продолжая этот процесс дальше, мы вычислим все коэффициенты $b_0, b_1, \dots, b_r$ многочлена $g(t)$ таким образом, чтобы он удовлетворял условию (61), и тем самым найдем решение вида (57) уравнения (56).

Можно было бы подставить решение вида (57) прямо в уравнение (54) и, считая коэффициенты многочлена $g(t)$ неизвестными, получить для этих коэффициентов систему линейных уравнений путем приравнивания коэффициентов при одинаковых членах в правой и левой частях соотношения (56). Проведенные выше вычисления показывают, что система уравнений, получаемая для коэффициентов многочлена $g(t)$, разрешима.

Таким образом, теорема 9 доказана.

З а м е ч а н и е. Полученная система для определения коэффициентов многочлена $g(t)$ является системой линейных уравнений с треугольной матрицей: при приравнивании коэффициентов у членов $t^r e^{\lambda t}$ мы получаем уравнение, содержащее только b_0 ; при приравнивании коэффициентов у членов $t^{r-1} e^{\lambda t}$ мы получаем уравнение, содержащее только b_0 и b_1 , и т. д.

Установим одно важное свойство квазимногочленов.

С) Если квазимногочлен

$$F(t) = f_1(t) e^{\lambda_1 t} + f_2(t) e^{\lambda_2 t} + \dots + f_m(t) e^{\lambda_m t}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — попарно различные числа, тождественно равен нулю на некотором интервале $r_1 < t < r_2$, то все многочлены $f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)$ тождественно равны нулю, а следовательно, и все коэффициенты квазимногочлена $F(t)$ равны нулю. Из этого непосредственно следует, что если два квазимногочлена $F(t)$ и $F^*(t)$ тождественно равны между собой на некотором интервале $r_1 < t < r_2$, то их соответственные коэффициенты совпадают.

Предложение С) будем доказывать индуктивно по числу m , которое будем здесь называть *порядком* квазимногочлена $F(t)$. При $m = 1$ оно справедливо, так как в этом случае равенства $F(t) = f_1(t) e^{\lambda_1 t} = 0$ и $f_1(t) = 0$ эквивалентны. Проведем теперь индуктивный переход от $m - 1$ к m ($m \geq 2$). Если квазимногочлен $F(t)$ тождественно равен нулю на интервале $r_1 < t < r_2$, то это же имеет место и для квазимногочлена

$$G(t) = p^{l+1}(F(t) e^{-\lambda_m t}),$$

где p — оператор дифференцирования, а l — степень многочлена $f_m(t)$. В силу предложения А) § 9 мы

имеем

$$G(t) = g_1(t) e^{(\lambda_1 - \lambda_m)t} + g_2(t) e^{(\lambda_2 - \lambda_m)t} + \dots \\ \dots + g_{m-1}(t) e^{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)t},$$

где

$$g_i(t) = (p + \lambda_i - \lambda_m)^{i+1} f_i(t); \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Квазимногочлен $G(t)$ имеет порядок $m-1$, и так как он тождественно равен нулю на интервале $r_1 < t < r_2$, то в силу предположения индукции все многочлены $g_1(t), \dots, g_{m-1}(t)$ тождественно равны нулю. Предположим, что какой-либо из многочленов $f_1(t), \dots, f_{m-1}(t)$ не равен нулю, например $f_1(t) \neq 0$, и приведем это предположение к противоречию. Допустим, что многочлен $f_1(t)$ имеет степень k , т. е. $f_1(t) = a_0 t^k + a_1 t^{k-1} + \dots + a_k$, причем $a_0 \neq 0$. Непосредственно проверяется, что

$$g_1(t) = (p + \lambda_1 - \lambda_m)^{l+1} f_1(t) = (\lambda_1 - \lambda_m)^{l+1} a_0 t^k + \dots,$$

а так как многочлен $g_1(t)$ тождественно равен нулю на интервале $r_1 < t < r_2$, то

$$(\lambda_1 - \lambda_m)^{l+1} a_0 = 0.$$

Так как числа λ_1 и λ_m различны, то из этого следует, что $a_0 = 0$. Полученное противоречие доказывает, что все коэффициенты многочленов $f_1(t), \dots, f_{m-1}(t)$ равны нулю, т. е. $F(t) = f_m(t) e^{\lambda_m t}$. Отсюда мы заключаем, что и все коэффициенты многочлена $f_m(t)$ также равны нулю.

Случай тождественного равенства двух квазимногочленов $F(t)$ и $F^*(t)$ на интервале $r_1 < t < r_2$ сводится к рассмотренному путем образования квазимногочлена $F(t) - F^*(t)$.

Итак, предложение С) доказано.

Примеры

1. Найдем частное решение уравнения

$$\ddot{z} + z = t \cos t = \frac{1}{2} t e^{it} + \frac{1}{2} t e^{-it}. \quad (66)$$

Решим отдельно уравнения

$$\ddot{z} + z = \frac{1}{2} t e^{it}, \quad (67)$$

$$\ddot{z} + z = \frac{1}{2} t e^{-it} \quad (68)$$

Очевидно, что если z — решение уравнения (67), то $\bar{z}$ — решение уравнения (68). Таким образом, достаточно решить лишь уравнение (67). Для него $r = 1$, $\lambda = i$, $k = 1$. Поэтому частное решение следует искать в виде

$$t(c^1 + c^2 t) e^{it}.$$

Соотношение (61) принимает вид

$$[(p + i)^2 + 1](c^1 t + c^2 t^2) = \frac{1}{2} t,$$

или

$$(p^2 + 2ip)(c^1 t + c^2 t^2) = \frac{1}{2} t.$$

Это дает

$$2c^2 + 2ic^1 + 4ic^2 t = \frac{1}{2} t,$$

откуда $c^2 = -\frac{1}{8} i$, $c^1 = ic^2 = \frac{1}{8}$. Таким образом, частное решение уравнения (67) имеет вид

$$z = \left(\frac{1}{8} t - \frac{i}{8} t^2 \right) e^{it},$$

а частное действительное решение уравнения (68) оказывается равным

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= \frac{1}{8} t (e^{it} + e^{-it}) + \frac{1}{8i} t^2 (e^{it} - e^{-it}) = \\ &= \frac{t}{4} \cos t + \frac{t^2}{4} \sin t. \end{aligned}$$

2. Рассмотрим функцию

$$f(t) = e^{4t} \cos 2t \cos 3t.$$

Так как каждый множитель $\cos 2t$, $\cos 3t$, e^{4t} представляет собой квазимногочлен, то и их произведение $f(t)$ также есть квазимногочлен. Приведем этот квазимногочлен к виду (53):

$$\begin{aligned} e^{4t} \cos 2t \cos 3t &= \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{2} \cdot \frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2} e^{4t} = \\ &= \frac{1}{4} e^{(4+5i)t} + \frac{1}{4} e^{(4+i)t} + \frac{1}{4} e^{(4-i)t} + \frac{1}{4} e^{(4-5i)t}. \end{aligned}$$

Приведение квазимногочленов к виду (53) полезно при решении неоднородных уравнений на основе теоремы 8.

§ 12. Метод исключения

До сих пор мы занимались решением одного линейного уравнения с постоянными коэффициентами. Оказывается, однако, что весьма общую систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами можно в некотором смысле свести к одному уравнению. Сведение это осуществляется *методом исключения*, аналогичным тому, который употребляется в теории линейных алгебраических (не дифференциальных) уравнений. Здесь будет дано изложение этого метода и сделаны некоторые выводы из него.

Мы будем рассматривать систему уравнений

$$L_{\alpha}^j(p) x^{\alpha} = f^j(t), \quad j, \alpha = 1, \dots, n; \quad (69)$$

здесь $x^1, \dots, x^n$ — неизвестные функции независимого переменного t , а $f^1(t), \dots, f^n(t)$ — заданные функции времени t . Каждый символ $L_s^j(p)$ представляет собой многочлен с постоянными коэффициентами относительно оператора дифференцирования p , так что один член $L_s^j(p) x^s$ представляет собой линейную комбинацию с постоянными коэффициентами относительно функции x^s и ее производных. Число уравнений системы (69) равно числу неизвестных функций.

Порядок системы (69) относительно неизвестной функции x^s обозначим через q_s , так что общий порядок системы (69) определяется формулой $q = q_1 + \dots + q_2 + \dots + q_n$. Ставя задачу решения системы (69), мы, естественно, должны предполагать, что каждая неизвестная функция x^s имеет все производные до порядка q_s включительно; предположение о существовании производных более высоких порядков не вытекает из постановки задачи.

Применяя к системе (69) метод исключения, мы будем предполагать, что каждая из неизвестных функций x^s имеет достаточное число производных, точно так же как и каждая из функций $f^j(t)$. Делая эти допущения, мы, с одной стороны, сужаем класс рассматриваемых решений (предположение о достаточной дифференцируемости неизвестных функций), а с другой стороны, сужаем класс рассматриваемых уравнений (предположение о достаточной дифференцируемости функций $f^j(t)$). Первое из этих ограничений можно снять, доказав, что если $x^1, \dots, x^n$ — решение

системы (69) и если правые части $f^i(t)$ имеют достаточное число производных, то каждая из функций x^s имеет достаточное число производных (см. примеры 3 и 4).

Перейдем к изложению метода исключения.

А) Рассмотрим матрицу

$$\begin{vmatrix} L_1^1(p) & \dots & L_n^1(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_1^n(p) & \dots & L_n^n(p) \end{vmatrix} \quad (70)$$

системы уравнений (69). Каждый элемент $L_s^i(p)$ матрицы (70) есть многочлен относительно p . Таким образом, можно вычислить детерминант $D(p)$ матрицы (70) и ее миноры. Алгебраическое дополнение элемента $L_s^i(p)$ матрицы (70) (т. е. минор этого элемента, взятый с надлежащим знаком) обозначим через $M_j^s(p)$. Из курса высшей алгебры известно, что имеет место тождество

$$M_\alpha^i(p) L_s^\alpha(p) = \delta_s^i D(p), \quad (71)$$

где δ_s^i — так называемый символ Кронекера:

$$\delta_i^i = 1, \quad \delta_s^i = 0 \quad \text{при } i \neq s.$$

Умножая уравнение (69) на многочлен $M_\alpha^i(p)$ (т. е. производя ряд дифференцирований, умножений на числа и сложений) и суммируя затем по α , получаем равенство

$$M_\alpha^i(p) L_\beta^\alpha(p) x^\beta = M_\alpha^i(p) f^\alpha(t). \quad (72)$$

(При переходе от равенств (69) к равенству (72) мы использовали существование достаточно большого числа производных у функций x и $f(t)$.) В силу (71) можно переписать равенство (72) в виде

$$D(p) x^i = M_\alpha^i(p) f^\alpha(t). \quad (73)$$

Полученная нами система уравнений (73) ($i = 1, \dots, n$) обладает тем свойством, что каждая неизвестная функция x^i входит лишь в одно уравнение (73). Мы доказали, таким образом, что если система функций $x^1, \dots, x^n$ представляет собой решение системы (69), то каждая отдельная функция x^i является решением уравнения (73).

Не следует думать, однако, что если для каждого номера i выбрать произвольным образом решение x^i уравнения (73) и затем составить систему функций $x^1, \dots, x^n$, то полученная система функций будет решением системы (69). Для того чтобы найти общее решение $x^1, \dots, x^n$ системы (69), нужно найти общее решение x^i каждого уравнения (73) ($i = 1, \dots, n$), составить систему функций $x^1, \dots, x^n$ и затем выяснить, при каких условиях (при каких соотношениях между постоянными интегрирования) эта система функций удовлетворяет системе уравнений (69).

Сделаем теперь некоторые выводы из метода исключения. Формулируем, прежде всего, результат, полученный в предложении А), для случая однородной системы уравнений

$$L_a^i(p) x^a = 0, \quad (74)$$

В) Если система функций $x^1, \dots, x^n$ представляет собой решение системы (74), то каждая отдельная функция x^i , входящая в это решение, удовлетворяет уравнению

$$D(p) x^i = 0,$$

где $D(p)$ — детерминант матрицы $\|L_s^i(p)\|$ системы (74). Из этого, в частности, следует, что если детерминант $D(p)$ есть устойчивый многочлен (см. § 10, А)), то каждое решение $x^1, \dots, x^n$ системы (74) удовлетворяет неравенству

$$(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 < R^2 e^{-2\alpha t} \quad \text{при } t \geq 0, \quad (75)$$

где α — положительная константа, зависящая от системы (74), а R — константа, зависящая от решения $x^1, \dots, x^n$.

Неравенство (75) непосредственно следует из неравенства (47) § 10.

Покажем теперь, как, пользуясь методом исключения, следует решать однородную систему уравнений (74).

Систему (74) перепишем в векторной форме:

$$L(p) x = 0, \quad (76)$$

где $L(p) = \|L_s^i(p)\|$ — матрица системы (74), а $x = (x^1, \dots, x^n)$.

С) Допустим, что детерминант $D(p)$ системы (74) не обращается тождественно в нуль, и пусть λ — ко-

рень многочлена $D(p)$, имеющий кратность k . Будем искать решение уравнения (76), имеющее вид

$$x = g(t) e^{\lambda t}, \quad (77)$$

где $g(t) = (g^1(t), \dots, g^n(t))$ — вектор, компоненты

$$g^1(t), \dots, g^n(t) \quad (78)$$

которого являются многочленами степени $k-1$ относительно t с неопределенными коэффициентами. Каждое решение вида (77) уравнения (76) мы будем называть соответствующим корню λ .

Подставляя предполагаемое решение (77) в уравнение (76), мы получим (см. § 9, А))

$$0 = L(p) g(t) e^{\lambda t} = e^{\lambda t} L(p + \lambda) g(t).$$

После сокращения на $e^{\lambda t}$ это дает

$$L(p + \lambda) g(t) = 0. \quad (79)$$

Таким образом, вектор (77) тогда и только тогда является решением уравнения (76), когда многочлены (78) удовлетворяют условию (79). Переписывая векторное уравнение (79) в координатной форме, получим n соотношений

$$L_a^i(p + \lambda) g^a(t) = 0. \quad (80)$$

Левая часть каждого соотношения (80) представляет собой многочлен степени $k-1$ относительно t , коэффициенты которого являются линейными однородными функциями коэффициентов многочленов (78). Приравнявая нулю коэффициент при каждой степени в каждом из соотношений (80), мы получим систему линейных однородных уравнений относительно коэффициентов многочленов (78). Эта система эквивалентна уравнению (79).

Таким образом, изложенный метод сводит задачу отыскания решений вида (77) к решению некоторой линейной однородной системы алгебраических уравнений. Из сказанного видно, что решения вида (77) определены на всем бесконечном интервале $-\infty < t < +\infty$.

Вопрос о том, как отыскивать все решения уравнения (76), решается нижеследующей теоремой.

Теорема 10. Допустим, что детерминант $D(p)$ системы (74) не обращается тождественно в нуль, и пусть

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$$

— совокупность всех различных корней многочлена $D(p)$. Тогда произвольное решение x уравнения (76) может быть записано в виде

$$x = x_1 + \dots + x_m, \quad (81)$$

где x_i — некоторое решение уравнения (76), соответствующее корню λ_i (см. С)). Отсюда, в частности, следует, что каждое решение уравнения (76) определено для всех значений t .

Доказательство. Допустим, что $x = (x^1, \dots, x^n)$ — некоторое решение уравнения (76) определенное на интервале $r_1 < t < r_2$; покажем, что на этом интервале оно может быть записано в виде (81). В силу предложения В) каждая функция x^s , $s = 1, \dots, n$, на интервале $r_1 < t < r_2$ удовлетворяет уравнению

$$D(p) x^s = 0$$

и потому в силу предложения С) § 9 может быть записана на этом интервале в виде

$$x^s = \sum_{i=1}^m g_i^s(t) e^{\lambda_i t}; \quad s = 1, \dots, n. \quad (82)$$

Здесь $g_i^s(t)$ — многочлен степени $k_i - 1$, где k_i — кратность корня λ_i .

Таким образом, каждое решение x уравнения (76) на интервале своего определения $r_1 < t < r_2$ записывается в виде

$$x = g_1(t) e^{\lambda_1 t} + \dots + g_m(t) e^{\lambda_m t}, \quad (83)$$

где $g_i(t)$ — вектор, компоненты которого являются многочленами степени $k_i - 1$. Для доказательства теоремы 9 нам достаточно показать теперь, что каждое слагаемое $g_i(t) e^{\lambda_i t}$ в правой части равенства (83) есть решение уравнения (76). Для доказательства этого подставим решение (83) в уравнение (76). Получаем

$$\begin{aligned} 0 &= L(p) (g_1(t) e^{\lambda_1 t} + \dots + g_m(t) e^{\lambda_m t}) = \\ &= e^{\lambda_1 t} L(p + \lambda_1) g_1(t) + \dots + e^{\lambda_m t} L(p + \lambda_m) g_m(t). \end{aligned} \quad (84)$$

Так как числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ попарно различны, то в силу предложения С) § 11 из равенства (84) следует

$$e^{\lambda_i t} L(p + \lambda_i) g_i(t) = 0; \quad i = 1, \dots, m,$$

или, иначе,

$$L(p) g_i(t) e^{\lambda_i t} = 0; \quad i = 1, \dots, m.$$

Но это и значит, что $x_i = g_i(t) e^{\lambda_i t}$ есть решение уравнения (76).

Итак, теорема 10 доказана.

Примеры

1. Решим методом исключения систему уравнений

$$\dot{x}^1 + x^1 + \dot{x}^2 = 0,$$

$$\ddot{x}^1 - x^1 + \ddot{x}^2 + x^2 = 0.$$

Перепишем ее в символической форме:

$$(p + 1)x^1 + px^2 = 0,$$

$$(p^2 - 1)x^1 + (p^2 + 1)x^2 = 0.$$

Детерминант системы, как легко видеть, равен $p^2 + 2p + 1$; он имеет двукратный корень $\lambda = -1$. Согласно теореме 9 решение системы следует искать в виде

$$x^1 = (at + b)e^{-t},$$

$$x^2 = (ct + d)e^{-t}.$$

Подстановка этих функций в первое уравнение дает (после сокращения на e^{-t})

$$a + c - ct - d = 0,$$

откуда

$$c = 0, \quad a = d.$$

Те же соотношения для коэффициентов получаются и при подстановке во второе уравнение системы. Таким образом, общее решение рассматриваемой системы записывается в виде

$$x^1 = (at + b)e^{-t},$$

$$x^2 = ae^{-t},$$

где a и b — произвольные постоянные.

2. Применим метод исключения к нормальной системе линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}^i = a_{\alpha}^i x^{\alpha}. \quad (85)$$

Перепишем систему (85), пользуясь символическими обозначениями:

$$p x^i = a_{\alpha}^i x^{\alpha},$$

или, иначе,

$$(a_{\alpha}^i - p \delta_{\alpha}^i) x^{\alpha} = 0, \quad (86)$$

где δ_s^j — символ Кронекера. Система (86) является частным случаем общей системы (74), причем

$$L_s^i(p) = a_s^i - p \delta_s^i,$$

и детерминант $D(p)$ в данном случае оказывается характеристическим детерминантом матрицы $\|a_s^i\|$ системы (85). Решение системы (86) следует теперь искать методом неопределенных коэффициентов, изложенным в предложении С) и теореме 10.

Систему (85) можно записать в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x}, \quad (87)$$

где $A = \|a_s^i\|$, $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$. В частном случае, когда все корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ характеристического многочлена $D(p)$ попарно различны и потому просты, решение уравнения (87), соответствующее собственному значению λ_i , имеет вид

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{g}_i e^{\lambda_i t}, \quad (88)$$

где компоненты вектора $\mathbf{g}_i$ являются многочленами нулевой степени, т. е. числами.

Подставляя решение (88) в уравнение (87), получаем

$$\lambda_i \mathbf{g}_i e^{\lambda_i t} = A \mathbf{g}_i e^{\lambda_i t}.$$

После сокращения на $e^{\lambda_i t}$ находим

$$A \mathbf{g}_i = \lambda_i \mathbf{g}_i,$$

а это значит, что $\mathbf{g}_i$ есть собственный вектор матрицы A с собственным значением λ_i . Так как в случае

различных собственных значений все собственные векторы с заданным собственным значением коллинеарны между собой, то, выбирая для собственного значения λ_i некоторый фиксированный собственный вектор h_i , мы получим $g_i = c^i h_i$, где c^i — произвольная константа. Таким образом, если все собственные значения матрицы A различны, то произвольное решение x уравнения (87) записывается в виде

$$x = c^1 h_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c^n h_n e^{\lambda_n t}, \quad (89)$$

где $c^1, \dots, c^n$ — произвольные константы.

3. Пусть

$$\dot{x} = Ax \quad (90)$$

— векторная запись нормальной системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. Здесь $A = \|a_j^i\|$ — квадратная матрица порядка n , а $x = (x^1, \dots, x^n)$ — неизвестный вектор. Экспонентой e^A матрицы A называют матричный ряд

$$e^A = E + A + \frac{1}{2!} A^2 + \dots + \frac{1}{n!} A^n + \dots,$$

где E — единичная матрица; этот матричный ряд всегда сходится. При этом сходимость ряда, составленного из квадратных матриц порядка n , определяется как сходимость ряда по каждому отдельному элементу матрицы, стоящему на определенном месте. Оказывается, что имеет место формула

$$e^{A_1} e^{A_2} = e^{A_1 + A_2},$$

где A_1, A_2 — квадратные матрицы порядка n , перестановочные между собой. Далее, известно, что матричная функция

$$e^{tA} = E + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!} A^n + \dots$$

имеет непрерывную производную $\frac{d}{dt} e^{tA}$ и выполняется равенство

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}. \quad (91)$$

Рассмотрим матричную функцию

$$X(t) = e^{tA}.$$

Из равенства (91) следует, что функция $X(t)$ является решением матричного дифференциального уравнения

$$\dot{X} = AX$$

с начальным условием $X(0) = E$ (см. § 5). Таким образом, столбцы матрицы $X(t)$ являются решениями системы (90); кроме того, это линейно независимые решения. Следовательно, матрица $X(t)$ является фундаментальной матрицей системы (90), а решение $x(t)$ системы (90) с начальными условиями $x(t_0) = x_0$ записывается в виде

$$x(t) = e^{tA} x_0$$

(см. § 4, Н)).

4. Рассмотрим нормальную систему линейных неоднородных уравнений

$$\dot{x} = Ax + b(t), \quad (92)$$

где $A = \|a_j^i\|$ — квадратная матрица порядка n , $x = (x^1, \dots, x^n)$ — n -мерный вектор, $b(t) = (b^1(t), \dots, b^n(t))$ — непрерывная на интервале $q_1 < t < q_2$ векторная функция. Как было показано в примере 3, матричная функция e^{tA} является фундаментальной матрицей однородной системы (90). Поэтому в силу предложения Н) § 5 решение $x(t)$ системы (92) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, $q_1 < t_0 < q_2$, записывается в виде

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A} b(\tau) d\tau.$$

Это так называемая *формула Коши*.

§ 13. Метод комплексных амплитуд

В различных разделах техники и физики, в которых имеют дело с колебательными процессами, важную роль играют гармонические колебания. Математически гармоническое колебание задается функцией

$$r \cos(\omega t + \alpha), \quad r \geq 0. \quad (93)$$

Здесь r — амплитуда колебания, α — его начальная фаза, а число ω определяет частоту колебания и

обычно называется *частотой*. Именно:

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T},$$

где n — число колебаний в единицу времени, а T — период колебания. Мы уже видели (см. пример 1 § 3), что уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (94)$$

имеет в качестве своего общего решения гармоническую функцию (93) частоты ω с произвольными амплитудой и фазой. Уравнение (94) называется *уравнением гармонического осциллятора*.

При изучении гармонических колебаний нередко приходится иметь дело с уравнением

$$L(p)x = r \cos(\omega t + \alpha), \quad (95)$$

где в правой части стоит гармоническая функция. Уравнение (95) легко решить, пользуясь способом, изложенным в теореме 8, так как гармоническая функция является квазимногочленом. В случае когда коэффициенты многочлена $L(p)$ действительны, можно использовать теорему 8 несколько иным способом. Способ этот называется в электротехнике *методом комплексных амплитуд* и заключается в следующем.

А) Наряду с действительной гармонической функцией (93) рассмотрим *соответствующую* ей комплексную гармоническую функцию

$$\rho e^{i\omega t}, \quad (96)$$

где

$$\rho = re^{i\alpha}. \quad (97)$$

Функция (96) обладает тем свойством, что ее действительная часть совпадает с функцией (93):

$$\rho e^{i\omega t} = re^{i(\omega t + \alpha)} = r \cos(\omega t + \alpha) + ir \sin(\omega t + \alpha).$$

Комплексное число (97) называется *комплексной амплитудой* комплексной гармонической функции (96); оно объединяет в себе действительную амплитуду r и начальную фазу α . Отметим, что

$$r = |\rho|.$$

В случае когда коэффициенты многочлена $L(p)$ действительны, для решения уравнения (95) решают

предварительно уравнение

$$L(p)z = \rho e^{i\omega t}. \quad (98)$$

Непосредственно видно, что если $z = x + iy$ — решение уравнения (98), то x — решение уравнения (95). Предполагая, что $i\omega$ не есть корень многочлена $L(p)$:

$$L(i\omega) \neq 0, \quad (99)$$

ищем (см. теорему (8)) решение уравнения (98) в виде комплексной гармонической функции $z = \sigma e^{i\omega t}$ с комплексной амплитудой $\sigma = se^{i\beta}$. Подставляя функцию $z = \sigma e^{i\omega t}$ в уравнение (98), получаем

$$\sigma = \frac{\rho}{L(i\omega)} \quad (100)$$

(см. § 8, В)). Таким образом, решение уравнения (95) находится в виде функции

$$x = s \cos(\omega t + \beta); \quad (101)$$

амплитуда s и начальная фаза β этого решения определяются из формулы

$$se^{i\beta} = \frac{\rho e^{ia}}{L(i\omega)}$$

(см. (100)). В частности, $s = |\sigma| = \frac{r}{|L(i\omega)|}$. Если многочлен $L(p)$ устойчив, то соотношение (99), очевидно, выполнено. В этом случае любое решение уравнения (95) имеет вид

$$x = u + s \cos(\omega t + \beta), \quad (102)$$

где u — решение однородного уравнения $L(p)u = 0$. Решение u этого однородного уравнения стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, и потому любое решение уравнения (95) стремится к решению (101). Решение (101) называется *установившимся*; оно соответствует *установившемуся процессу*, в то время как решение (102) описывает *переходный процесс*. Установившееся решение (101) является единственным периодическим решением среди всех решений (102).

При применении метода комплексных амплитуд обычно не рассматривают решений действительного уравнения (95), а сразу исходят из комплексного уравнения (98).

Изложим теперь метод комплексных амплитуд в применении к системе уравнений. Речь идет об отыскании частного решения системы уравнений

$$L_{\gamma}^j(p) x^{\gamma} = r^j \cos(\omega t + \alpha^j); \quad j = 1, \dots, n, \quad (103)$$

с действительными коэффициентами, в правых частях которой стоят гармонические колебания одной и той же частоты ω .

В) Предположим, что детерминант $D(p)$ системы (103) (см. § 12, А)) не обращается в нуль при $p = i\omega$. Для отыскания решения системы (103) будем искать сначала решение системы уравнений

$$L_{\gamma}^j(p) z^{\gamma} = \rho^j e^{i\omega t}; \quad j = 1, \dots, n, \quad (104)$$

где

$$\rho^j = r^j e^{i\alpha^j}.$$

Так как коэффициенты всех многочленов $L_k^j(p)$ действительны, то из всякого решения $z^1, \dots, z^n$ системы (104) мы получаем решение

$$x^k = \operatorname{Re} z^k; \quad k = 1, \dots, n,$$

системы (103). Решение системы (104) ищем в виде

$$z^k = \sigma^k e^{i\omega t}; \quad k = 1, \dots, n. \quad (105)$$

Подстановка функций (105) в систему (104) дает (после сокращения на $e^{i\omega t}$) систему уравнений

$$L_{\beta}^j(i\omega) \sigma^{\beta} = \rho^j,$$

которая однозначно разрешима относительно неизвестных σ^j , так как детерминант $D(i\omega)$ по предположению отличен от нуля. Найдем решение этой системы и положим

$$\sigma^k = s^k e^{i\beta^k};$$

тогда в силу (105) мы находим решение

$$x^k = s^k \cos(\omega t + \beta^k); \quad k = 1, \dots, n, \quad (106)$$

системы (103). Если детерминант $D(p)$ системы (103) есть устойчивый многочлен, то неравенство $D(i\omega) \neq 0$ выполнено, и, сверх того, каждое решение системы (103) отличается от решения (106) слагаемым, стремящимся к нулю при $t \rightarrow +\infty$ (см. § 12, В)). Таким образом, в случае устойчивого многочлена $D(p)$

решение (106) системы (103) не только является одним из частных решений, но представляет собой установившееся решение.

Пример

Решим уравнение

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = r \cos(\omega t + \alpha) \quad (107)$$

гармонического осциллятора, находящегося под воздействием внешней гармонической силы. Вместо уравнения (107) рассмотрим соответствующее комплексное уравнение

$$\ddot{z} + \omega_1^2 z = r e^{i(\omega t + \alpha)}. \quad (108)$$

Если $\omega \neq \omega_1$, то уравнение (108) имеет решение вида $z = \sigma e^{i\omega t}$, причем в силу формулы (100)

$$\sigma = \frac{r e^{i\alpha}}{\omega_1^2 - \omega^2}.$$

Таким образом, уравнение (107) имеет решение

$$x = \frac{r}{|\omega_1^2 - \omega^2|} \cos(\omega t + \beta), \quad (109)$$

где $\beta = \alpha$ при $\omega_1 > \omega$ и $\beta = \alpha + \pi$ при $\omega_1 < \omega$. Формула (109) дает *вынужденные колебания* осциллятора под воздействием гармонической внешней силы. Здесь важно отметить явление резонанса, заключающееся в том, что амплитуда

$$\frac{r}{|\omega_1^2 - \omega^2|}$$

вынужденного колебания возрастает с убыванием разности $|\omega_1 - \omega|$. Интересно также отметить, что фаза β колебания (109) совпадает с фазой α вынуждающей силы при $\omega_1 > \omega$ и противоположна ей при $\omega_1 < \omega$. Общее решение уравнения (107) записывается в виде

$$x = r_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + \frac{r}{|\omega_1^2 - \omega^2|} \cos(\omega t + \beta),$$

где $u = r_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1)$ — решение соответствующего однородного уравнения. Слагаемое u называется *собственным колебанием* осциллятора.

Если $\omega_1 = \omega$, то формула (109) теряет смысл. В этом случае решение уравнения (108) следует искать в виде

$$z = \rho t e^{i\omega t},$$

где ρ — комплексное число (см. теорему 8). Согласно формуле (101) § 11 имеем

$$[(p + i\omega)^2 + \omega^2] \rho t = r e^{i\alpha},$$

откуда

$$\rho = \frac{r e^{i\alpha}}{2i\omega}.$$

Таким образом, частное решение уравнения (108) имеет (при $\omega_1 = \omega$) вид

$$z = \frac{r t e^{i(\omega t + \alpha)}}{2i\omega} = \frac{r t e^{i\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)}}{2\omega},$$

а решение уравнения (107) оказывается равным

$$x = \frac{rt}{2\omega} \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{rt}{2\omega} \sin(\omega t + \alpha).$$

Таким образом, при $\omega = \omega_1$ явление резонанса заключается в том, что амплитуда $rt/2\omega$ становится переменной и неограниченно возрастает с течением времени. В реальных приборах это явление не наблюдается ввиду наличия «трения».

§ 14. Электрические цепи

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений находит свои применения в различных областях техники; она применяется в электротехнике и, в частности, радиотехнике. При некоторой идеализации работа радиоприбора может быть математически описана системой обыкновенных дифференциальных уравнений, причем неизвестными функциями времени в этой системе являются величины токов, проходящих через различные детали прибора, или падения напряжения между отдельными узлами прибора. Радиоприборы дают очень богатый материал, иллюстрирующий применения теории обыкновенных дифференциальных уравнений, гораздо более богатый, чем, например, задачи механики. Богатство это характеризуется, в частности, тем, что систему обыкновенных дифферен-

циальных уравнений, возникшую из какой-нибудь технической задачи, часто удается *смоделировать* электрическим прибором, т. е. сконструировать такой электрический прибор, работа которого описывается той же системой уравнений, что и интересующий нас технический объект. Такой моделирующий электроприбор может до некоторой степени помочь в решении системы уравнений, так как, наблюдая за его работой, мы тем самым наблюдаем за поведением неизвестных функций, удовлетворяющих системе уравнений. Физические законы, управляющие работой электроприборов, формулируются настолько просто, что они легко могут быть сообщены даже человеку, почти незнакомому с физикой. Здесь в несколько догматической форме дается изложение простейших законов электротехники и приводится несколько примеров применения дифференциальных уравнений к изучению работы электроприборов.

Элементы электрических цепей

К числу важнейших деталей, из которых конструируются электроприборы, принадлежат *сопротивление*, *индуктивность* (самоиндукция) и *емкость* (конденсатор). Каждая из этих деталей является двухполюсником, т. е. обладает двумя контактами, которые при монтаже электроприбора присоединяются к полюсам других деталей. Во время работы электроприбора через двухполюсник, вмонтированный в этот прибор, проходит электрический ток, и при этом электрическое состояние двухполюсника характеризуется в каждый момент времени t двумя величинами: *силой тока* $I_{ab}(t)$, идущего от полюса a к полюсу b двухполюсника ab , и *падением напряжения* $U_{ab}(t)$ от полюса a к полюсу b . Сила тока $I_{ab}(t)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения; если ток «течет» от полюса a к полюсу b (имеется в виду так называемое *техническое* направление тока), то число $I_{ab}(t)$ положительно; в противном случае оно отрицательно. Падение напряжения $U_{ab}(t)$ от полюса a к полюсу b представляет собой разность $V_a(t) - V_b(t)$ потенциалов в полюсе a и полюсе b . Таким образом, обе величины $I_{ab}(t)$ и $U_{ab}(t)$, характеризующие состояние двухполюсника ab в момент времени t , зависят от того, какой из полюсов поставлен

на первом месте и какой на втором. При перемене порядка полюсов каждая из величин $I_{ab}(t)$, $U_{ab}(t)$, очевидно, меняет знак, так что мы имеем соотношения

$$I_{ba}(t) = -I_{ab}(t), \quad (110)$$

$$U_{ba}(t) = -U_{ab}(t). \quad (111)$$

Для каждого двухполюсника ab функции $I_{ab}(t)$ и $U_{ab}(t)$ времени t не независимы, а связаны некоторым соотношением, представляющим собой физический закон, управляющий работой двухполюсника. Для сопротивления, самоиндукции и емкости физические законы, управляющие их работой, даются ниже-следующим предложением.

А) Для двухполюсника ab , представляющего собой сопротивление, имеет место соотношение (закон Ома)

$$U_{ab}(t) = R_{ab} I_{ab}(t), \quad (112)$$

здесь R_{ab} — положительный коэффициент, называемый *сопротивлением* и могущий для различных двухполюсников принимать различные значения, но постоянный для каждого данного двухполюсника; при этом мы имеем всегда

$$R_{ba} = R_{ab}. \quad (113)$$

Для двухполюсника ab , представляющего собой индуктивность, имеет место соотношение

$$U_{ab}(t) = L_{ab} \frac{d}{dt} I_{ab}(t); \quad (114)$$

здесь L_{ab} — положительный коэффициент, называемый *индуктивностью* и могущий для различных двухполюсников принимать различные значения, но постоянный для каждого данного двухполюсника. При этом

$$L_{ba} = L_{ab}. \quad (115)$$

Для двухполюсника ab , являющегося емкостью (конденсатором), имеет место соотношение

$$I_{ab}(t) = C_{ab} \frac{d}{dt} U_{ab}(t), \quad (116)$$

где C_{ab} — положительный коэффициент, называемый *емкостью* и могущий принимать различные значения для различных двухполюсников, но имеющий для

данного двухполюсника вполне определенное значение; при этом мы имеем

$$C_{ab} = C_{ba}. \quad (117)$$

Интегрируя это соотношение (117); получаем

$$U_{ab}(t) = U_{ab}(t_0) + \frac{1}{C_{ab}} \int_{t_0}^t I_{ab}(t) dt. \quad (118)$$

Функция

$$Q_{ab}(t) = C_{ab} U_{ab}(t)$$

представляет собой физическую величину, связанную с состоянием конденсатора в данный момент времени и называемую *зарядом* конденсатора ab . Соотношение (118) часто пишут в виде

$$U_{ab}(t) = \frac{1}{C_{ab}} \int I_{ab}(t) dt,$$

где под $\int I_{ab}(t) dt$ подразумевают заряд конденсатора.

Важную роль в работе электрических приборов играет явление *взаимоиндукции* между двумя индуктивностями.

В) Две индуктивности a_1b_1 и a_2b_2 с величинами $L_{a_1b_1} = L_1$ и $L_{a_2b_2} = L_2$ могут находиться в состоянии *взаимоиндукции*, характеризующемся *коэффициентом взаимои́ндукции* $M = M_{a_1b_1, a_2b_2}$. В этом случае падение напряжения $U_{a_1b_1}(t) = U_1(t)$ на двухполюснике a_1b_1 связано не только с током $I_{a_1b_1}(t) = I_1(t)$, но также и с током $I_{a_2b_2}(t) = I_2(t)$. Точно так же напряжение $U_{a_2b_2}(t) = U_2(t)$ на двухполюснике a_2b_2 связано не только с током $I_2(t)$, но и с током $I_1(t)$. Соотношения, которые имеют здесь место, даются формулами

$$U_1(t) = L_1 \frac{d}{dt} I_1(t) + M \frac{d}{dt} I_2(t), \quad (119)$$

$$U_2(t) = L_2 \frac{d}{dt} I_2(t) + M \frac{d}{dt} I_1(t). \quad (120)$$

При этом для коэффициента $M_{a_1b_1, a_2b_2}$ взаимои́ндукции выполнены равенства

$$M_{a_1b_1, a_2b_2} = M_{a_2b_2, a_1b_1} = -M_{a_1b_1, b_2a_2}.$$

Кроме того, для него имеет место неравенство

$$M^2 \leq L_1 L_2.$$

Чем больше «взаимодействие» двух индуктивностей, тем более коэффициент взаимоиנדукции M приближается по величине к значению $\sqrt{L_1 L_2}$.

Описанные в предложении А) двухполюсники называются *пассивными*; сами они не могут вызвать появления в приборе электрических явлений. Непосредственной причиной появления в приборе электрических токов служат *активные* двухполюсники — *источники напряжения* и *источники тока*.

С) Для двухполюсника ab , представляющего собой источник напряжения, имеет место соотношение

$$U_{ab}(t) = U(t), \quad (121)$$

где $U(t)$ — заданная функция времени t , характеризующая источник напряжения. Соотношение (121) можно рассматривать как связывающее функции $U_{ab}(t)$ и $I_{ab}(t)$, только связь эта такова, что функция $I_{ab}(t)$ в нее не входит. Для источника тока аналогично имеет место соотношение

$$I_{ab}(t) = I(t),$$

где $I(t)$ — заданная функция t , характеризующая источник тока. Наиболее часто рассматриваются источники напряжения и источники тока, для которых функции $U(t)$ и $I(t)$ являются либо константами, либо периодическими функциями вида

$$r \cos(\omega t + \alpha).$$

Таковы главнейшие и в то же время простейшие детали, из которых монтируются электроприборы. Сами приборы называются *электрическими цепями*, а детали, из которых они монтируются, — их *элементами*. Следует отметить, что существуют элементы, отличные от описанных выше, в частности существуют *многополюсные* элементы. Примером *трехполюсного* элемента служит *электронная лампа (триод)*, работа которой будет разобрана в дальнейшем.

Законы Кирхгофа

Перейдем теперь к формулировке *законов Кирхгофа*, управляющих работой электрических цепей.

Д) *Электрической цепью* называется конечная совокупность элементов (в частности, двухполюсников вышеописанных видов), полюсы которых соединены

в так называемые узлы цепи, так что в каждом узле соединяются два или большее число полюсов различных элементов цепи. Первый закон Кирхгофа утверждает, что *сумма всех токов, втекающих в каждый узел цепи из всех элементов, примыкающих к этому узлу, равна нулю*. Второй закон Кирхгофа вытекает из предположения, что в каждом узле a цепи имеется электрический потенциал $V_a(t)$, а падение напряжения $U_{ab}(t)$ от узла a к узлу b представляет собой разность потенциалов, имеющих в узлах a и b , так что $U_{ab}(t) = V_a(t) - V_b(t)$. Из этого предположения вытекает, что *если $a, b, c, \dots, h, k$ — некоторая последовательность узлов электрической цепи, то имеет место соотношение*

$$U_{ab}(t) + U_{bc}(t) + \dots + U_{hk}(t) + U_{ka}(t) = 0,$$

которое и представляет собой второй закон Кирхгофа. Его формулируют следующим образом: *сумма падений напряжения вдоль всякого замкнутого контура цепи равна нулю*. (В этих формулировках законов

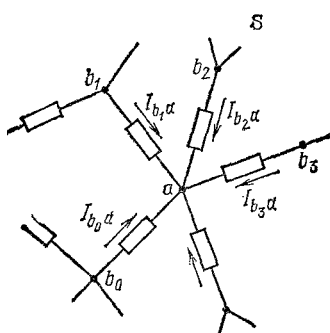


Рис. 5

Кирхгофа не предполагается, что элементами цепи являются двухполюсники.) Дадим теперь более четкую формулировку законов Кирхгофа применительно к цепям, составленным из двухполюсников.

Е) Пусть S — некоторая электрическая цепь, составленная из двухполюсников. Первый закон Кирхгофа утверждает, что если a есть произвольный узел цепи S , а $b_1a, b_2a, \dots, b_qa$ —

совокупность всех двухполюсников, примыкающих к узлу a (рис. 5), то

$$I_{b_1a}(t) + I_{b_2a}(t) + \dots + I_{b_qa}(t) = 0.$$

Второй закон Кирхгофа утверждает, что если $ab, bc, \dots, hk, ka$ — некоторая последовательность двухполюсников, входящих в цепь S (каждый следующий двухполюсник начинается в том узле, в котором кончается предыдущий; рис. 6), то

$$U_{ab}(t) + U_{bc}(t) + \dots + U_{hk}(t) + U_{ka}(t) = 0.$$

Рассчитать работу электрической цепи, составленной из двухполюсников, — это значит найти ток и напряжение, соответствующие каждому двухполюснику, входящему в цепь; таким образом, если цепь состоит из n двухполюсников, то перед нами стоит задача отыскания $2n$ функций времени. Закон, управляющий работой каждого отдельного двухполюсника, дает одно соотношение между искомыми функциями, так что для $2n$ искоемых функций мы уже получаем n соотношений. Остальные n соотношений дают законы Кирхгофа. Тот факт, что законы Кирхгофа дают именно n независимых между собой соотношений, можно доказать, но здесь мы этого делать не будем. В результате использования всех соотношений мы получаем систему $2n$ уравнений для $2n$ искоемых функций. Уравнения эти частично дифференциальные, частично конечные (алгебраические). Законы Кирхгофа дают конечные уравнения, и ими прежде всего нужно воспользоваться для исключения части неизвестных функций. При этом обычно пользуются одним из следующих двух путей. Можно за основные неизвестные функции принять токи и выразить через них напряжения. В этом случае нужно прежде всего воспользоваться первым законом Кирхгофа: выразить все токи через минимальное число независимых (в силу этого закона). Независимые токи называются *контурными*. После этого следует воспользоваться вторым законом Кирхгофа, заменяя в нем каждое напряжение его выражением через соответствующий ток. Этот способ называется *методом контурных токов*. Второй способ заключается в том, что за основные неизвестные функции принимают напряжения на двухполюсниках, а токи выражают через напряжения (при помощи законов, управляющих работой каждого двухполюсника). В этом случае нужно при помощи второго закона Кирхгофа выразить все напряжения через минимальное число независимых (в силу этого

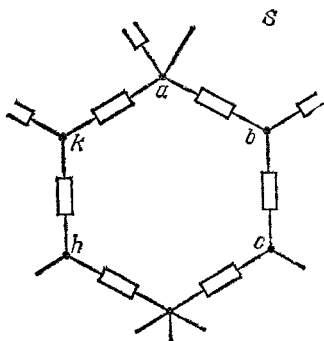


Рис. 6

закона). Независимые напряжения называются *узловыми*. Затем нужно использовать первый закон Кирхгофа, заменяя в нем каждый ток его выражением через соответствующее напряжение. Этот способ называется *методом узловых напряжений*.

Операционное сопротивление двухполюсника

Прежде чем перейти к разбору примеров расчета электрических цепей, запишем соотношения (112), (114), (118), (119), (120), т. е. законы, управляющие работой двухполюсников, при помощи символических обозначений.

Ф) Пусть ab — двухполюсник, представляющий собой сопротивление, индуктивность или емкость. Положим

$$U_{ab}(t) = U(t), \quad I_{ab}(t) = I(t), \quad R_{ab} = R, \quad L_{ab} = L, \quad C_{ab} = C.$$

Если в дополнение к употреблявшимся ранее символическим обозначениям (см. § 8, А)) ввести естественное обозначение $\frac{1}{p} f(t) = \int f(t) dt$, то соотношения (112), (114), (118) можно записать одной формулой:

$$U(t) = Z(p) I(t) \quad (122)$$

(рис. 7), где соответственно

$$Z(p) = R, \quad Z(p) = Lp,$$

$$Z(p) = \frac{1}{Cp}.$$

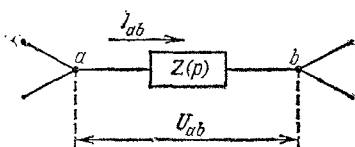


Рис. 7

Функция $Z(p)$ называется *операционным сопротивлением* двухполюсника ab . Для емкости она не является многочленом, а представляет собой рациональную функцию $\frac{1}{Cp}$:

$$U(t) = \frac{1}{Cp} I(t). \quad (123)$$

Соотношение (123) после умножения на Cp приобретает привычный вид $I(t) = CpU(t)$, где имеется лишь многочлен от p . Если положить

$$G(p) = \frac{1}{Z(p)},$$

то соотношение (122) приобретает вид

$$I(t) = G(p) U(t).$$

Функция $G(p)$ называется *операционной проводимостью* двухполюсника ab и имеет соответственно вид

$$G(p) = \frac{1}{R}, \quad G(p) = \frac{1}{Lp}, \quad G(p) = Cp.$$

Соотношения (119), (120) в операционных обозначениях получают вид

$$U_1(t) = L_1 p I_1(t) + M p I_2(t),$$

$$U_2(t) = L_2 p I_2(t) + M p I_1(t).$$

Перейдем к разбору примеров. Для наглядности электрические цепи изображают графически, ставя в соответствие каждому узлу точку, а каждому двухполюснику — отрезок или кривую, соединяющую соответствующие узлы; на каждом таком отрезке изображается условное обозначение соответствующего двухполюсника (рис. 8).

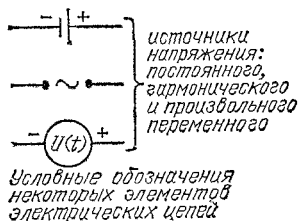
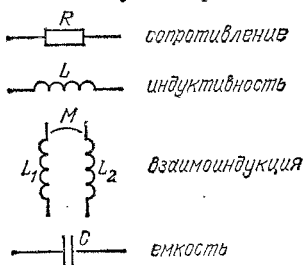


Рис. 8

Примеры

1 (Колебательный контур). Пусть S — электриче-

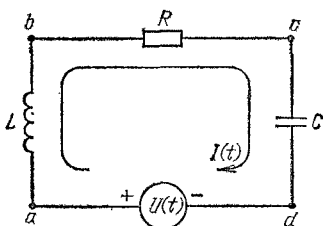


Рис. 9

ская цепь с четырьмя узлами a, b, c, d , состоящая из четырех двухполюсников ab, bc, cd, da (рис. 9). Двухполюсник ab — индуктивность L , двухполюсник bc — сопротивление R , двухполюсник cd — емкость C и, наконец, двухполюсник ad — источник напряжения $U_{ad}(t) = U(t)$. Для расчета используем метод контурных токов. Применяя первый закон Кирхгофа к узлу

б, получаем $I_{ab}(t) + I_{cb}(t) = 0$ или, иначе, $I_{ab}(t) = -I_{bc}(t)$. Так обстоит дело всегда, когда к одному узлу примыкают ровно два двухполюсника. Таким образом, мы имеем

$$I_{ab}(t) = I_{bc}(t) = I_{cd}(t) = I_{da}(t) = I(t).$$

Здесь $I(t)$ есть контурный ток. Далее, выписывая для каждого двухполюсника закон, управляющий его работой, получаем

$$\begin{aligned} U_{ab}(t) &= LpI(t), & U_{bc}(t) &= RI(t), \\ U_{cd}(t) &= \frac{1}{Cp} I(t), & U_{da}(t) &= -U(t). \end{aligned} \quad (124)$$

Второй закон Кирхгофа дает

$$U_{ab}(t) + U_{bc}(t) + U_{cd}(t) + U_{da}(t) = 0. \quad (125)$$

Из соотношений (124) и (125) получаем

$$\left(Lp + R + \frac{1}{Cp} \right) I(t) = U(t). \quad (126)$$

Можно умножить обе части соотношения (126) на p (что означает почленное дифференцирование); тогда получим

$$\left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} \right) I(t) = pU(t). \quad (127)$$

Таково дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи.

Если изъять из цепи двухполюсник ad , то мы получим так называемую разомкнутую цепь, состоящую

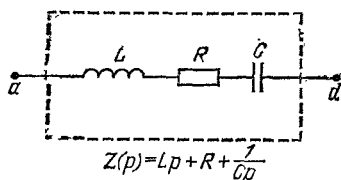


Рис. 10

из трех пассивных двухполюсников ab , bc , cd . Эту цепь (всю целиком) можно рассматривать как двухполюсник с полюсами a и d (рис. 10). Для такого двухполюсника закон, управляющий его работой, дается соотношением

(126), аналогичным соотношению (122).

Здесь функция $Z(p) = Lp + R + \frac{1}{Cp}$ является операционным сопротивлением, а обратная ей величина $G(p) = \frac{Cp}{LCp^2 + RCp + 1}$ является операционной проводимостью.

Если положить $U(t) = 0$, то это будет равносильно предположению, что в нашей цепи отсутствует активный двухполюсник ad и цепь состоит из трех пассивных двухполюсников ab , bc , cd , причем узлы a и d совпадают (рис. 11). Уравнение, описывающее работу этой пассивной электрической цепи S^* , имеет вид

$$\left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right) I(t) = 0. \quad (128)$$

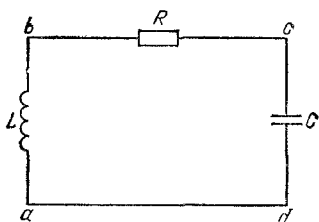


Рис. 11

Как уже отмечалось раньше, в пассивной электрической цепи электрические явления сами по себе не возникают, и это отражается в том, что частным решением уравнения (128) является функция $I(t) \equiv 0$. Можно, однако, рассмотреть работу электрической цепи S^* , считая, что ток в ней уже имеется, и выяснить, как этот ток будет изменяться со временем. Пусть λ_1 и λ_2 — корни многочлена

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}. \quad (129)$$

(Так как числа L , R , C больше нуля (см. А)), то действительные части корней λ_1 и λ_2 отрицательны, и потому электрический процесс в цепи S^* затухает со временем (см. § 10, А)). Затухание это может проходить, однако, различными способами; если корни λ_1 , λ_2 комплексны, то всякое ненулевое решение уравнения (128) имеет колебательный характер (см. пример 3 § 8); если же корни λ_1 и λ_2 действительны, то затухание происходит аperiодически, именно: всякое решение уравнения (128) становится, начиная с некоторого момента времени, монотонным. Вопрос о том, будут ли корни λ_1 и λ_2 комплексны или действительны, решается тем, какой знак имеет число

$$\Delta = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC};$$

если $\Delta < 0$, то решения уравнения (128) имеют колебательный характер, если же $\Delta > 0$, то они аperiодичны.

Особый интерес представляет колебательный контур S^* в том случае, когда в нем вовсе отсутствует сопротивление R . В этом случае наша цепь состоит лишь из двух пассивных элементов ab и cd , причем $b = c$, $a = d$ (рис. 12). При этом предположении уравнение электрической цепи получает вид



Рис. 12

$$\left(p^2 + \frac{1}{LC}\right) I(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения записывается в виде

$$I(t) = s \cos(\omega_1 t + \beta),$$

где $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Таким образом, при отсутствии сопротивления в пассивном колебательном контуре происходят незатухающие колебания с частотой

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Величину $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ назовем *собственной частотой* колебательного контура S в общем случае. Заметим, что эта величина при $R \neq 0$ не совпадает с фактической частотой колебаний в контуре, равной

$$\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}.$$

Вернемся теперь к рассмотрению колебательного контура S и рассмотрим случай гармонического источника напряжения $U(t)$.

Так как корни многочлена (129) имеют отрицательные действительные части, то в цепи S можно рассматривать установившийся процесс. Решение будем искать по способу комплексных амплитуд (см. § 13). Пусть $U(t) = re^{i\omega t}$ — комплексное гармоническое колебание с действительной амплитудой $r > 0$. Тогда правая часть уравнения (127) имеет вид

$$pU(t) = p(re^{i\omega t}) = ir\omega e^{i\omega t}.$$

Имеем

$$I_{\text{уст}}(t) = \sigma e^{i\omega t},$$

причем комплексная амплитуда σ тока $I_{уст}(t)$ определяется формулой

$$\sigma = \frac{i r \omega}{i R \omega + \left(-L \omega^2 + \frac{1}{C} \right)} = \frac{r}{R + i \left(L \omega - \frac{1}{C \omega} \right)}$$

(см. § 13, А)). Отсюда для действительной амплитуды получаем

$$s = |\sigma| = \frac{r}{\sqrt{R^2 + \left(L \omega - \frac{1}{C \omega} \right)^2}}.$$

Из этой формулы видно, что при заданной амплитуде r источника напряжения амплитуда s силы тока достигает своего максимума при собственной частоте $\omega = \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ контура S . При этой частоте амплитуды s и r связаны соотношением $s = \frac{r}{R}$, т. е. контур при этой частоте ведет себя так, как будто в нем имеется лишь сопротивление (для остальных частот амплитуда s тока имеет меньшее значение, чем $\frac{r}{R}$). Это явление называется *резонансом* (ср. § 13, пример). Колебательный контур L, R, C резонирует на свою собственную частоту $\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Интересно выяснить, как проходят гармонические колебания через самоиндукцию и емкость. Разберем этот вопрос в примерах 2 и 3.

2. Рассмотрим замкнутую цепь ab, bc, ca , где ab — гармонический источник напряжения $U_{ab}(t) = r e^{i \omega t}$, bc — индуктивность величины L , нагрузка ca дана в виде сопротивления R (рис. 13).

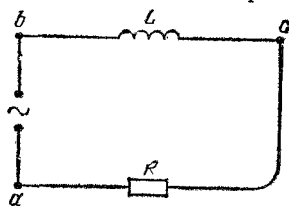


Рис. 13

В силу первого закона Кирхгофа токи, проходящие через все три двухполюсника, равны между собой. В силу второго закона Кирхгофа сумма падений напряжений на замкнутом контуре $abca$ равна нулю. Падение напряжения на двухполюснике ab равно

$$U_{ab}(t) = r e^{i \omega t},$$

где ρ — действительное число. Падение напряжения на двухполюснике bc равно

$$U_{bc} = L\rho I.$$

Падение напряжения на двухполюснике ca равно

$$U_{ca} = RI.$$

В силу второго закона Кирхгофа имеем равенство

$$\rho e^{i\omega t} + L\rho I + RI = 0,$$

или, иначе,

$$L\rho I + RI = -\rho e^{i\omega t}. \quad (130)$$

Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$\rho LI + RI = 0.$$

Характеристический многочлен этого уравнения имеет лишь один корень с отрицательной действительной частью $-\frac{R}{L}$, так что многочлен этот устойчив. Таким образом, любое решение неоднородного уравнения (130) стремится к частному решению этого уравнения. Это частное решение может быть записано в виде

$$\sigma e^{i\omega t},$$

где σ — комплексная амплитуда. Подставляя это решение в неоднородное уравнение (130), мы получаем

$$L\sigma i\omega e^{i\omega t} + R\sigma e^{i\omega t} = -\rho e^{i\omega t}.$$

Из последнего уравнения получаем для комплексной амплитуды σ решение

$$\sigma = \frac{-\rho}{Li\omega + R},$$

так что

$$|\sigma| = \frac{\rho}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}}. \quad (131)$$

Из этой формулы видно, что амплитуда силы тока I тем меньше, чем больше частота ω и чем больше индуктивность L . Можно сказать, что индуктивность пропускает высокочастотный ток тем хуже, чем она больше.

3. Будем рассматривать контур $abca$, где ab — источник напряжения $U = \rho e^{i\omega t}$, bc — емкость вели-

чины C , ca — нагрузка сопротивления R (рис. 14). В силу первого закона Кирхгофа токи, проходящие через все три двухполюсника, равны между собой, а в силу второго закона Кирхгофа сумма падений напряжений на замкнутом контуре $abca$ равна нулю, так что мы имеем

$$\rho e^{i\omega t} + \frac{1}{C\rho} I + RI = 0,$$

или, иначе,

$$\frac{1}{C\rho} I + RI = -\rho e^{i\omega t}. \quad (132)$$

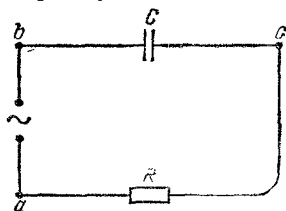


Рис. 14

Соответствующее однородное уравнение можно записать в виде

$$\frac{1}{C} I + R\rho I = 0.$$

Характеристический многочлен этого уравнения имеет единственный корень с отрицательной действительной частью $-\frac{1}{CR}$, так что многочлен этот устойчив.

Таким образом, каждое решение неоднородного уравнения (132) стремится к его частному решению, которое мы будем искать в виде $\sigma e^{i\omega t}$, где σ — комплексная амплитуда. Подставляя это решение в неоднородное уравнение (132), получаем $\frac{e^{i\omega t}}{C\rho} + R\sigma e^{i\omega t} = -\rho e^{i\omega t}$, или, иначе, $\frac{\sigma e^{i\omega t}}{Ci\omega} + R\sigma e^{i\omega t} = -\rho e^{i\omega t}$. Отсюда для модуля комплексной амплитуды σ получаем формулу

$$|\sigma| = \frac{\rho}{\sqrt{\frac{1}{C^2\omega^2} + R^2}}. \quad (133)$$

Из этой формулы видно, что емкость тем лучше пропускает гармоническое колебание, чем выше его частота и чем больше сама емкость.

Таким образом, из примеров 2 и 3 видно, что индуктивность и емкость в отношении пропускания гармонических колебаний ведут себя противоположно (см. формулы (131), (133)). Именно: индуктивность тем хуже пропускает гармонические колебания, чем выше их частота и чем больше сама индуктивность,

а емкость тем лучше пропускает гармонические колебания, чем выше их частота и чем больше сама емкость.

4 (Трансформатор). Трансформатор состоит из двух обмоток, первичной и вторичной, помещенных на одной катушке. К первичной обмотке подключается источник переменного напряжения, ко вторичной — нагрузка, например внешнее сопротивление. Каждая обмотка имеет индуктивность и сопротивление (внутреннее). Между обмотками имеется взаимоиндукция. Таким образом, трансформатор можно рассматривать как электрическую цепь, состоящую из двух раздель-

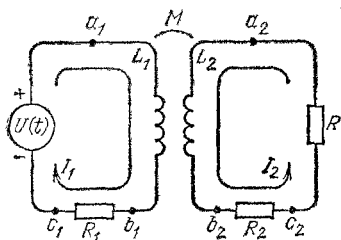


Рис. 15

ных контуров, связанных индуктивностью. Первый контур состоит из трех двухполюсников: a_1b_1 — индуктивность L_1 , b_1c_1 — внутреннее сопротивление R_1 , a_1c_1 — источник с напряжением $U_{a_1c_1} = U(t)$. Второй контур состоит также из трех двухполюсников: a_2b_2 —

индуктивность L_2 , b_2c_2 — внутреннее сопротивление R_2 , c_2a_2 — сопротивление нагрузки R . Кроме того, имеется взаимоиндукция $M_{a_1b_1, a_2b_2} = M$ (рис. 15). В силу первого закона Кирхгофа имеем

$$I_{a_1b_1} = I_{b_1c_1} = I_{c_1a_1} = I_1, \quad I_{a_2b_2} = I_{b_2c_2} = I_{c_2a_2} = I_2.$$

Таким образом, мы имеем два контурных тока I_1, I_2 . Применяя второй закон Кирхгофа, получаем

$$L_1 p I_1 + M p I_2 + R_1 I_1 - U(t) = 0,$$

$$L_2 p I_2 + M p I_1 + R_2 I_2 + R I_2 = 0,$$

или, иначе,

$$(L_1 p + R_1) I_1 + M p I_2 = U(t),$$

$$M p I_1 + (L_2 p + R_2 + R) I_2 = 0.$$

Детерминант $D(p)$ этой системы имеет вид

$$D(p) = (L_1 L_2 - M^2) p^2 + (L_1 R_2 + L_1 R + L_2 R_1) p + R_1 (R_2 + R).$$

В силу предложения В) § 10 этот многочлен устойчив (так как $L_1 L_2 - M^2 > 0$). Рассмотрим работу

трансформатора в случае, когда напряжение $U(t)$ изменяется гармонически, и будем искать установившееся решение по способу § 13, В)). Положим

$$U(t) = u_1 e^{i\omega t},$$

где u_1 — действительное положительное число (амплитуда напряжения, поданного на первичную обмотку). Неизвестные функции I_1 , I_2 будем искать в форме

$$I_1 = \sigma_1 e^{i\omega t}, \quad I_2 = \sigma_2 e^{i\omega t},$$

где σ_1 , σ_2 — комплексные амплитуды токов.

Наибольший теоретический интерес представляет *идеальный трансформатор*, т. е. такой трансформатор, в котором величины R_1 , R_2 и $L_1 L_2 - M^2$ малы. Пренебрегая этими величинами в уравнениях для определения величин σ_1 и σ_2 , получаем

$$\begin{aligned} L_1 \cdot i\omega \sigma_1 + M \cdot i\omega \sigma_2 &= u_1, \\ M \cdot i\omega \sigma_1 + (L_2 \cdot i\omega + R) \sigma_2 &= 0. \end{aligned}$$

Так как $M \approx \sqrt{L_1 L_2}$, то, вычитая из второго уравнения первое, умноженное на $\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$, мы получим

$$R \sigma_2 = - \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} u_1.$$

Таким образом, амплитуда $u_2 = R |\sigma_2|$ падения напряжения на нагрузке R оказывается равной

$$u_2 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} u_1;$$

величина $\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$ называется *коэффициентом трансформации*. Таким образом, если $L_2 > L_1$, то мы имеем трансформатор, повышающий напряжение:

$$\frac{u_2}{u_1} > 1;$$

при $L_2 < L_1$ мы получаем трансформатор, понижающий напряжение:

$$\frac{u_2}{u_1} < 1.$$

5 (Электрические фильтры). Рассмотрим электрическую цепь с четырьмя узлами a, b, c, d и пятью двухполюсниками (рис. 16):

ab — индуктивность, величины L ,

bc — индуктивность, имеющая ту же величину L ,

bd — емкость C ,

ad — источник с напряжением $U_{ad}(t) = U(t)$,

cd — сопротивление нагрузки R .

Положим

$$I_{ab} = I_1, \quad I_{bc} = I_2.$$

Тогда в силу первого закона Кирхгофа имеем

$$I_{bd} = I_1 - I_2, \quad I_{cd} = I_2.$$

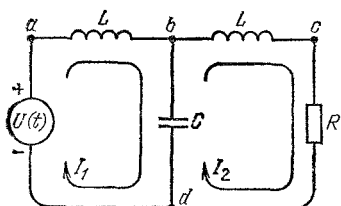


Рис. 16

На основании второго закона Кирхгофа получаем

$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} + U_{da} = 0,$$

$$U_{bc} + U_{cd} + U_{db} = 0,$$

или

$$LpI_1 + LpI_2 + RI_2 - U(t) = 0,$$

$$LpI_2 + RI_2 + \frac{1}{Cp}(I_2 - I_1) = 0.$$

Умножим второе уравнение на p , получим следующую систему:

$$LpI_1 + (Lp + R)I_2 = U(t),$$

$$-\frac{1}{C}I_1 + \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right)I_2 = 0.$$

Детерминант этой системы имеет вид

$$D(p) = L^2p^3 + LRp^2 + \frac{2Lp}{C} + \frac{R}{C}.$$

Согласно теореме 6 многочлен $D(p)$ устойчив. Будем теперь считать, что $U = pe^{i\omega t}$, где p — действительная амплитуда напряжения (см. § 13). Неизвестные функции I_1 и I_2 будем искать в форме

$$I_1 = a_1 e^{i\omega t}, \quad I_2 = a_2 e^{i\omega t},$$

где a_1 и a_2 — комплексные амплитуды токов, т. е. ограничимся отысканием установившегося режима.

Поставим задачу об определении падения напряжения $U_{cd} = RI_2$ на нагрузке. Мы имеем

$$a_2 = \frac{\frac{\rho}{C}}{\left(\frac{R}{C} - LR\omega^2\right) + i\omega\left(\frac{2L}{C} - L^2\omega^2\right)},$$

откуда находим амплитуду $a = |a_2|R$ напряжения U_{cd} :

$$a = |a_2|R = \frac{\rho \frac{R}{C}}{\sqrt{\left(\frac{R}{C} - LR\omega^2\right)^2 + \omega^2\left(\frac{2L}{C} - L^2\omega^2\right)^2}}.$$

При малых значениях частоты ω имеем $\frac{a}{\rho} \approx 1$; иначе говоря, напряжения малой частоты легко передаются через фильтр, почти не меняя амплитуды. При больших значениях частоты имеем

$$\frac{a}{\rho} \approx \frac{R}{CL^2\omega^3},$$

так что напряжения высокой частоты почти не проходят, «фильтруются».

Заменяем в этом контуре индуктивности емкостями и емкость индуктивностью (рис. 17).

Положим

$$I_{ab} = I_1, \quad I_{bc} = I_2.$$

Тогда в силу первого закона Кирхгофа имеем

$$I_{bd} = I_1 - I_2, \quad I_{cd} = I_2.$$

На основании второго закона Кирхгофа получаем

$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} + U_{da} = 0,$$

$$U_{bc} + U_{cd} + U_{ab} = 0,$$

или

$$\frac{1}{C} I_1 + \frac{1}{C} I_2 + R\rho I_2 = \rho U(t),$$

$$\frac{1}{C} I_2 + R\rho I_2 + L\rho^2 (I_2 - I_1) = 0. \quad (134)$$

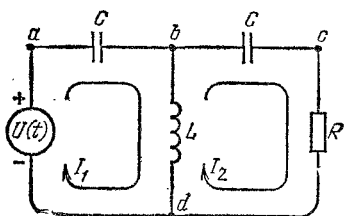


Рис. 17

Определитель этой системы имеет вид

$$D(p) = LRp^3 + \frac{2Lp^2}{C} + \frac{Rp}{C} + \frac{1}{C^2}.$$

Многочлен этот устойчив относительно p . Это значит, что каждый его корень имеет отрицательную действительную часть. А это значит, что каждое решение дифференциального уравнения $D(p)x = 0$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Отсюда на основании метода исключения следует, что каждое решение однородной системы, соответствующей системе (134), стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, каждое решение неоднородной системы (134) стремится к частному решению этой системы. Найдем это частное решение в предположении, что $U(t) = \rho e^{i\omega t}$, где ρ — действительное число. Неизвестные функции I_1 и I_2 будем искать в форме

$$I_1 = a_1 e^{i\omega t}, \quad I_2 = a_2 e^{i\omega t},$$

где a_1 и a_2 — комплексные амплитуды токов.

Будем искать падение напряжения $U_{cd} = RI_2$ на нагрузке. Подставляя I_1 и I_2 в систему (134), получим

$$\frac{1}{C} a_1 e^{i\omega t} + \frac{1}{C} a_2 e^{i\omega t} + Rpa_2 e^{i\omega t} = \rho e^{i\omega t},$$

$$\frac{1}{C} a_2 e^{i\omega t} + Rpa_2 e^{i\omega t} + Lp^2 (a_2 e^{i\omega t} - a_1 e^{i\omega t}) = 0,$$

или, иначе,

$$\frac{a_1}{Ci\omega} + \frac{a_2}{Ci\omega} + Ra_2 = \rho,$$

$$\frac{a_2}{Ci\omega} + Ra_2 + L(a_2 - a_1)i\omega = 0.$$

Из второго уравнения этой системы получаем

$$a_1 = a_2 + \frac{a_2}{LC(i\omega)^2} + \frac{Ra_2}{Li\omega}.$$

Далее, из первого уравнения мы имеем

$$\frac{a_2}{Ci\omega} - \frac{a_2}{LC^2(i\omega)^3} + \frac{Ra_2}{LC(i\omega)^2} + \frac{a_2}{Ci\omega} + Ra_2 = \rho.$$

Следовательно,

$$a_2 = \frac{\rho}{R + \frac{2}{Ci\omega} - \frac{1}{LC^2 i\omega^3} - \frac{R}{LC\omega^2}},$$

откуда находим амплитуду $a = |a_2| R$ напряжения U_{cd} :

$$a = |a_2| R = \frac{\rho R}{\sqrt{\left(R - \frac{R}{LC^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{C\omega} - \frac{1}{LC^2\omega^3}\right)^2}}.$$

Величина a тем больше, чем больше ω . При больших значениях ω мы имеем $\frac{a}{\rho} \approx 1$, или, иначе говоря, напряжения высокой частоты легко передаются через фильтр, почти не меняя амплитуды. Напряжения же малой частоты почти не проходят, «фильтруются». Такой фильтр лучше пропускает высокие частоты и хуже низкие, так, что он ведет себя противоположно предыдущему фильтру.

Глава 4

УСТОЙЧИВОСТЬ

Работа очень многих механических, электрических и другого типа устройств (машин, приборов и т. п.) описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет всегда бесконечное множество решений, и для задания одного определенного решения нужно указать его начальные значения. Между тем употребляемые в практике устройства обычно работают на вполне определенном режиме, и в их работе, во всяком случае на первый взгляд, невозможно обнаружить наличия бесконечного множества режимов работы, соответствующих различным решениям системы уравнений. Это может объясняться либо тем, что начальные значения решения при запуске устройства выбираются каким-то определенным образом, либо тем, что начальные значения при продолжительной работе прибора утрачивают свое влияние и устройство само стабилизирует свою работу на *стационарном* решении. С последним явлением мы уже сталкивались, когда разбирали работу электрических цепей. Приведем еще один пример. Стенные часы идут с совершенно определенным размахом маятника, хотя при запуске их маятник можно отклонить от вертикального положения более или менее сильно. Если при запуске часов маятник отклонить недостаточно сильно, то после небольшого числа колебаний он остановится. Если же отклонение достаточно велико, то через короткое время амплитуда колебаний маятника станет вполне определенной и часы будут идти с этой амплитудой колебаний неопределенно долго, практически бесконечно долго. Таким образом, у системы уравнений, описывающей работу часов, имеются два

стационарных решения: положение равновесия, соответствующее отсутствию хода, и периодическое решение, соответствующее нормальному ходу часов. Всякое другое решение — а этих решений, несомненно, имеется бесконечное множество — очень быстро приближается к одному из этих двух стационарных и по истечении некоторого времени становится практически неотличимым от него. Каждое из отмеченных двух стационарных решений является в некотором смысле *устойчивым*. Это значит, что если мы берем не стационарное решение, а решение, отклоняющееся от стационарного в начальный момент, и притом не слишком сильно, то взятое нестационарное решение приближается к стационарному. Таково не вполне точно сформулированное определение устойчивости решения. На этом же примере видно, что фазовое пространство системы уравнений, описывающей работу часов, распадается на две *области притяжения*. Если взять начальное значение в одной из областей, то решение будет стремиться к положению равновесия; если взять начальные значения в другой области, то решение будет стремиться к периодическому решению.

Из сказанного уже видно, что для полного понимания работы какого-либо устройства желательно иметь хорошее представление о фазовом пространстве системы уравнений, описывающей работу этого устройства. При этом важнее всего знать все устойчивые решения этой системы уравнений.

Из второй части теоремы 2 мы уже знаем, что если задаться определенным *конечным* промежутком времени, то при достаточно малом отклонении начальных значений решение отклонится мало на всем заданном промежутке времени, но это свойство решения вовсе не означает устойчивости. Когда речь идет об устойчивости, отклонение на *неопределенно большом* отрезке времени должно быть малым, если только отклонение начальных значений мало.

Настоящая глава в основном посвящена проблеме устойчивости положений равновесия автономной системы.

В нее включены также два важных приложения к техническим задачам: излагаются исследование Вышнеградского о работе паровой машины с регулятором Уатта и исследование Андронова о работе лампового

генератора электрических незатухающих колебаний. Первое из этих исследований явилось основополагающим в теории автоматического регулирования, второе — в теории нелинейных колебаний.

§ 15. Автономные системы дифференциальных уравнений и их фазовые пространства

Здесь будет дана геометрическая интерпретация автономной системы уравнений в фазовом пространстве этой системы. Эта интерпретация существенно отличается от геометрической интерпретации системы уравнений, указанной в § 1, 3, и правильнее должна называться не геометрической, а кинематической, так как в этой интерпретации каждому решению системы уравнений ставится в соответствие не кривая в пространстве, а движение точки по кривой. Кинематическая интерпретация (фазовое пространство) в некоторых отношениях более выразительна, чем геометрическая (система интегральных кривых).

Автономные системы

Система обыкновенных дифференциальных уравнений называется автономной, если в нее явно не входит независимое переменное или, как мы будем говорить, время t . Это значит, что закон изменения неизвестных функций, описываемый системой уравнений, не меняется с течением времени, как это обычно и бывает с физическими законами. Очень легко доказывается, что если

$$x^i = \varphi^i(t); \quad i = 1, \dots, n,$$

есть решение некоторой автономной системы уравнений, то

$$x^i = \varphi_*^i(t) = \varphi^i(t + c); \quad i = 1, \dots, n,$$

где c — константа, также есть решение той же автономной системы уравнений. Проведем доказательство этого факта на примере нормальной автономной системы уравнений.

А) Пусть

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \dots, x^n); \quad i = 1, \dots, n,$$

— автономная нормальная система уравнений порядка n и

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

— векторная ее запись. Автономность системы (1) заключается в том, что функции $f^i(x^1, \dots, x^n)$ являются функциями переменных $x^1, \dots, x^n$ и не зависят от времени t . Относительно функций $f^i(x^1, \dots, x^n)$ мы будем предполагать, что они определены на некотором открытом множестве Δ пространства размерности n , где координатами точки являются переменные $x^1, \dots, x^n$. Мы будем предполагать, что функции $f^i(x^1, \dots, x^n)$ и их частные производные первого порядка непрерывны на множестве Δ . Оказывается, что если

$$x^i = \varphi^i(t); \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

— решение системы (1), то

$$x^i = \varphi_*^i(t) = \varphi^i(t + c); \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

— также решение системы (1).

Из правила дифференцирования сложной функции вытекает соотношение

$$\dot{\varphi}_*^i(t) = \dot{\varphi}^i(t + c); \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_*^i(t) &= \frac{d}{dt} \varphi_*^i(t) = \frac{d}{dt} \varphi^i(t + c) = \\ &= \frac{d}{d(t + c)} \varphi^i(t + c) \frac{d(t + c)}{dt} = \dot{\varphi}^i(t + c) \cdot 1 = \dot{\varphi}^i(t + c). \end{aligned}$$

Докажем теперь, что (3) есть решение системы (1). Так как (2) есть решение, то мы имеем тождества

$$\dot{\varphi}^i(t) = f^i(\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)); \quad i = 1, \dots, n.$$

Заменяя в этих тождествах t на $t + c$, получаем

$$\dot{\varphi}^i(t + c) = f^i(\varphi^1(t + c), \dots, \varphi^n(t + c)); \quad i = 1, \dots, n.$$

Из этого в силу (4) и (3) вытекает

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_*^i(t) &= \dot{\varphi}^i(t + c) = f^i(\varphi^1(t + c), \dots, \varphi^n(t + c)) = \\ &= f^i(\varphi_*^1(t), \dots, \varphi_*^n(t)). \end{aligned}$$

Перейдем теперь к кинематической интерпретации решений системы (1). Формально речь будет идти об

интерпретации в n -мерном пространстве, но для наглядности разумно представлять себе случай плоскости ($n = 2$). В дальнейшем все существенные результаты будут относиться только к этому случаю.

В) Каждому решению

$$x^i = \varphi^i(t); \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

автономной системы (1) поставим в соответствие движение точки в n -мерном пространстве, задаваемое уравнениями (5), где $x^1, \dots, x^n$ — координаты точки в пространстве, а t — время. В процессе своего движения точка описывает некоторую кривую — траекторию движения. Если сопоставить решению (5) не процесс движения, а траекторию движения точки, то мы получим менее полное представление о решении, поэтому желательно на траектории указать хотя бы направление движения. Оказывается, что если наряду с решением (5) имеется другое решение:

$$x^i = \psi^i(t); \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

то траектории, соответствующие этим решениям, либо не пересекаются в пространстве, либо совпадают. Именно: если траектории имеют хотя бы одну общую точку, т. е.

$$\varphi^i(t_1) = \psi^i(t_2); \quad i = 1, \dots, n, \quad (7)$$

то

$$\psi^i(t) = \varphi^i(t + c), \text{ где } c = t_1 - t_2. \quad (8)$$

Последние равенства показывают, что траектории, описываемые первым и вторым решениями, совпадают между собой, но первое решение описывает ту же самую траекторию, что и второе, с «опозданием» на время c . Если точка, соответствующая первому решению, достигла некоторого положения на траектории в момент времени $t + c$, то точка, соответствующая второму решению, уже побывала в этом положении в момент времени t .

Для того чтобы вывести из равенства (7) тождество (8), рассмотрим наряду с решением (5) решение

$$\varphi_*^i(t) = \varphi^i(t + c) \quad (9)$$

(см. А)). Из равенства (7) при $c = t_1 - t_2$ следует равенство

$$\varphi_*^i(t_2) = \varphi^i(t_2 + c) = \varphi^i(t_1) = \psi^i(t_2); \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, решения (6) и (9) системы (1) имеют общие начальные условия (а именно значения в момент времени t_2) и потому в силу теоремы 2 совпадают, так что

$$\psi^i(t) = \varphi^i_*(t) = \varphi^i(t + c); \quad i = 1, \dots, n.$$

Положения равновесия и замкнутые траектории

Поставим вопрос о том, может ли траектория, изображающая решение системы, пересекать себя.

С) Пусть

$$x^i = \varphi^i(t); \quad i = 1, \dots, n, \quad (10)$$

— некоторое решение системы (1). Допустим, что имеет место равенство

$$\varphi^i(t_1) = \varphi^i(t_2); \quad i = 1, \dots, n; \quad t_1 \neq t_2, \quad (11)$$

где числа t_1 и t_2 , конечно, принадлежат интервалу $r_1 < t < r_2$ определения решения (10). Оказывается, что при этом условии решение (10) может быть продолжено на весь бесконечный интервал $-\infty < t < +\infty$. Поэтому мы сразу будем считать, что само решение (10) определено на этом интервале $-\infty < t < +\infty$. Оказывается, далее, что возможны два следующих взаимно исключающих случая.

1) Для всех значений t имеет место равенство

$$\varphi^i(t) = a^i; \quad i = 1, \dots, n,$$

где $a = (a^1, \dots, a^n)$ — точка множества Δ , не зависящая от t . Таким образом, в этом случае точка $(\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t))$ в действительности не движется при изменении t , а стоит на месте. Само решение (10) и точка a в этом случае называются *положением равновесия* системы (1).

2) Существует такое положительное число T , что при произвольном t имеют место равенства

$$\varphi^i(t + T) = \varphi^i(t); \quad i = 1, \dots, n,$$

но при $|\tau_1 - \tau_2| < T$ хотя бы для одного $i = 1, \dots, n$ имеет место неравенство

$$\varphi^i(\tau_1) \neq \varphi^i(\tau_2).$$

В этом случае решение (10) называется *периодическим* с периодом T , а траектория, описываемая

решением (10), называется *замкнутой траекторией*, или *циклом*.

Докажем предложение С). Как было отмечено в предложении В), из равенства (11) следуют тождества

$$\varphi^i(t+c) = \varphi^i(t); \quad i=1, \dots, n; \quad c=t_1-t_2. \quad (12)$$

При этом функции $\varphi^1(t+c), \dots, \varphi^n(t+c)$ также представляют решение системы (1) (см. А)). Это решение и первоначальное решение (1) совпадают там, где они оба определены (теорема 2). Если объединить эти два решения, мы получим новое решение с большим интервалом существования, чем исходное, а именно с интервалом $r_1 - c < t < r_2$ при $c > 0$ и $r_1 < t < r_2 - c$ при $c < 0$. Так как t_1 и t_2 равноправны, то знак величины c можно изменить, так что решение можно продолжить на интервал $r_1 - |c| < t < r_2 + |c|$. Так как, кроме того, для продолженного решения равенство (11) по-прежнему выполнено, то к нему опять можно применить указанный способ расширения интервала существования, и потому мы можем продолжить решение (10) на всю бесконечную прямую с сохранением для него тождества (12).

Каждое число c , для которого выполнено тождество (12), будем называть *периодом* решения (10); множество всех периодов решения (10) обозначим через F . Множество F есть некоторое множество чисел. Установим некоторые его свойства. Заменяя в соотношении (12) t на $t-c$, получаем $\varphi^i(t) = \varphi^i(t-c)$. Таким образом, если c есть период, то $-c$ также есть период. Допустим, что c_1 и c_2 — периоды, т. е.

$$\varphi^i(t+c_1) = \varphi^i(t), \quad \varphi^i(t+c_2) = \varphi^i(t); \quad i=1, \dots, n.$$

Тогда

$$\varphi^i((t+c_2)+c_1) = \varphi^i(t+c_2) = \varphi^i(t); \quad i=1, \dots, n.$$

Таким образом, если c_1 и c_2 — периоды, то $c_1 + c_2$ также есть период. Допустим, что $c_1, c_2, \dots, c_m, \dots$ — последовательность периодов, сходящаяся к некоторому числу c_0 ; тогда

$$\varphi^i(t+c_m) = \varphi^i(t); \quad i=1, \dots, n; \quad m=1, 2, \dots$$

Так как функции $\varphi^i(t)$ непрерывны, то при $m \rightarrow \infty$

$$\varphi^i(t+c_0) = \varphi^i(t),$$

т. е. мы видим, что c_0 — также период, так что множество F замкнуто.

Так как число c в равенстве (12) отлично от нуля ($t_1 \neq t_2$), то множество F содержит числа, отличные от нуля. Из установленных свойств множества F легко выводится, что для него есть только две возможности: 1) множество F совпадает с множеством всех действительных чисел; 2) в множестве F имеется минимальное положительное число T , и тогда F состоит из всех целочисленных кратных числа T . Докажем, что действительно имеются только эти две возможности. Так как множество F вместе с каждым числом c содержит число $-c$ и так как в F имеются числа, отличные от нуля, то в F имеются положительные числа.

Допустим, что в множестве F нет наименьшего положительного числа, т. е. что для произвольного положительного числа ε имеется положительный период $c < \varepsilon$. Из доказанных свойств множества F следует (так как c — период), что все числа mc , где m — целое число, также являются периодами. Так как $c < \varepsilon$, то для произвольного действительного числа c_0 можно подобрать такое целое m , что $|c_0 - mc| < \varepsilon$. Таким образом, произвольное число c_0 является предельным для множества F , и потому ввиду замкнутости множества F это множество совпадает с множеством всех действительных чисел.

Допустим теперь, что F не есть множество всех действительных чисел. В силу доказанного, тогда в F имеется наименьшее положительное число T . Пусть c — произвольный период. Можно выбрать такое целое число m , что $|c - mT| < T$. Допустим, что $c \neq mT$; тогда $|c - mT|$ есть отличный от нуля период, а это невозможно, так как $|c - mT| < T$, что противоречит минимальности числа T . Итак, доказано, что каждое число c из F может быть записано в виде $c = mT$, где m — целое число.

Теперь уже легко проверить, что если F есть множество всех действительных чисел, то имеет место случай 1, а если F не есть множество действительных чисел, то имеет место случай 2. Таким образом, предложение С) доказано.

Кратко предложение С) можно сформулировать, сказав, что имеется три сорта траекторий: 1) положение равновесия; 2) периодические траектории (циклы); 3) траектории без самопересечений. Естественно

считать, что последний случай является «наиболее общим».

Из теоремы 2 следует, что через каждую точку области Δ задания системы (1) проходит траектория, изображающая решение системы. Таким образом, вся область Δ заполнена траекториями, причем согласно В) траектории эти попарно не пересекаются. Среди всех траекторий особо выделяются самопересекающиеся, которые являются либо положениями равновесия, либо циклами. Эти два сорта траекторий имеют весьма важное значение, и основные результаты этой главы будут относиться именно к ним.

Такова кинематическая интерпретация решений автономной системы уравнений. Сама система уравнений также допускает геометрическую интерпретацию.

Фазовые пространства

Д) Поскольку автономная система уравнений (1) определена на открытом множестве Δ , каждой точке $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ множества Δ поставлена в соответствие последовательность из чисел, именно последовательность

$$f^1(x_0^1, \dots, x_0^n), \dots, f^n(x_0^1, \dots, x_0^n).$$

Эти числа можно рассматривать как компоненты вектора $f(x_0)$, проведенного в n -мерном пространстве и выходящего из точки x_0 . Таким образом, автономной системе ставится в соответствие геометрический образ — векторное поле, заданное на открытом множестве Δ . В каждой точке x_0 множества Δ определен вектор $f(x_0)$, выходящий из этой точки. Связь между геометрической интерпретацией решений и геометрической интерпретацией самой системы уравнений заключается в следующем. Пусть x_0 — произвольная точка множества Δ . В силу геометрической интерпретации системы уравнений этой точке поставлен в соответствие выходящий из нее вектор $f(x_0)$. Далее, в силу теоремы 2 существует решение $x = \varphi(t)$ системы (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(t_0) = x_0.$$

В силу кинематической интерпретации решению $x = \varphi(t)$ соответствует в пространстве движение точки,

описывающее траекторию, причем в момент времени $t = t_0$ движущаяся точка проходит через положение x_0 в пространстве. Оказывается, что векторная скорость точки, описывающей решение $x = \varphi(t)$, в момент ее прохождения через положение x_0 совпадает с вектором $f(x_0)$. Именно это совпадение и выражается системой уравнений (1) при

$$x^i = x_0^i; \quad i = 1, \dots, n; \quad t = t_0.$$

Пространство размерности n , в котором интерпретируются решения автономной системы (1) в виде траекторий и сама автономная система (1) в виде векторного поля, называется *фазовым пространством* системы (1). Траектории называются *фазовыми траекториями*, векторы $f(x)$ называются *фазовыми скоростями*. Связь между обеими интерпретациями заключается в том, что скорость движения точки по траектории в каждый момент времени совпадает с фазовой скоростью, заданной в том месте пространства, где в этот момент находится движущаяся точка.

Рассмотрим теперь положения равновесия с точки зрения фазовых скоростей.

Е) Для того чтобы точка $a = (a^1, \dots, a^n)$ множества Δ была положением равновесия системы (1), т. е. чтобы имелось решение $x = \varphi(t)$ системы, для которого

$$\varphi(t) \equiv a, \tag{13}$$

необходимо и достаточно, чтобы фазовая скорость $f(a)$ в точке a была равна нулю. Таким образом, для отыскания всех положений равновесия системы (1) нужно решить систему уравнений

$$f^i(a^1, \dots, a^n) = 0; \quad i = 1, \dots, n.$$

Эта система представляет собой не систему дифференциальных уравнений, а, как говорят, систему конечных уравнений (производные в нее не входят).

Для доказательства утверждения Е) допустим, что a — положение равновесия, т. е. что имеется решение $x = \varphi(t)$, для которого выполнены соотношения (13), и подставим в систему (1) это решение. Так как производная постоянной равна нулю, то подстановка дает

$$f^i(a) = \frac{d}{dt} \varphi^i(t) = \frac{d}{dt} a^i = 0.$$

Таким образом, вектор $f(a)$ фазовой скорости действительно обращается в нуль в точке a . Допустим, что, обратно, вектор $f(a)$ фазовой скорости обращается в нуль в точке a , т. е. что $f^i(a) = 0$; $i = 1, \dots, n$, и покажем, что в этом случае равенства (13) определяют решение системы (1). Подстановка дает

$$\dot{\varphi}^i(t) = f^i(a); \quad i = 1, \dots, n;$$

равенства эти выполнены, так как слева стоит производная константы, а справа — нуль.

Г) Геометрическая интерпретация решения (2) системы уравнений (1), указанная в § 3, ставит в соответствие этому решению кривую K в $(n+1)$ -мерном пространстве переменных $t, x^1, \dots, x^n$, определяемую системой уравнений (1). Здесь t является одной из координат в пространстве R . Переход к интерпретации в n -мерном фазовом пространстве S переменных $x^1, \dots, x^n$ заключается в том, что мы перестаем считать величину t координатой точки, а считаем ее параметром. Таким образом, фазовая траектория L получается из кривой K в результате проектирования пространства R на пространство S в направлении оси t .

Геометрическую наглядность это проектирование приобретает при $n = 2$. В этом случае пространство R трехмерно, а пространство S представляет собой плоскость (см. пример 1).

Фазовая плоскость линейной однородной системы с постоянными коэффициентами

Перейдем теперь к построению фазовых траекторий на фазовой плоскости для системы

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2, \\ \dot{x}^2 &= a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2, \end{aligned} \tag{14}$$

или в векторной форме

$$\dot{x} = Ax, \tag{15}$$

с постоянными действительными коэффициентами a_j^i . При этом нам придется разобрать несколько различных случаев, так как фазовая картина траекторий системы существенно зависит от значений коэффициентов.

Следует заметить, что начало координат (точка $(0, 0)$) всегда является положением равновесия системы (14). Это положение равновесия тогда и только тогда является единственным, когда детерминант матрицы $\|a_j^i\|$ отличен от нуля, или, что то же, оба собственных значения этой матрицы отличны от нуля. Здесь наше внимание будет направлено, в основном, на изучение поведения фазовых траекторий вблизи этого положения равновесия.

Допустим, что собственные значения матрицы A действительны, различны и отличны от нуля. Тогда, как это следует из результатов § 12 (пример 2), произвольное действительное решение уравнения (15) можно записать в виде

$$x = c^1 h_1 e^{\lambda_1 t} + c^2 h_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (16)$$

Здесь h_1 и h_2 — действительные линейно независимые собственные векторы матрицы A , λ_1 и λ_2 — его действительные собственные значения, а c^1 и c^2 — действительные константы. Решение (16) разложим по базису (h_1, h_2) , положив

$$x = \xi^1 h_1 + \xi^2 h_2; \quad (17)$$

тогда

$$\xi^1 = c^1 e^{\lambda_1 t}, \quad \xi^2 = c^2 e^{\lambda_2 t}. \quad (18)$$

Координаты ξ^1, ξ^2 на фазовой плоскости P системы (14), вообще говоря, не являются прямоугольными,

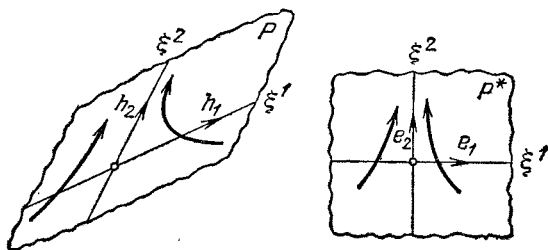


Рис. 18

поэтому отобразим векторное пространство P линейно на вспомогательное двумерное векторное пространство P^* таким образом, чтобы при этом векторы h_1, h_2 перешли во взаимно ортогональные единичные векторы плоскости P^* , направленные соответственно по оси абсцисс и оси ординат (рис. 18). Точка $x =$

$= \xi^1 h_1 + \xi^2 h_2$ плоскости P перейдет при этом отображении в точку с декартовыми прямоугольными координатами ξ^1, ξ^2 в плоскости P^* . Таким образом, траектория, заданная параметрическими уравнениями (18) в плоскости P , перейдет в траекторию (которую мы также назовем *фазовой*), заданную теми же уравнениями в прямоугольных координатах плоскости P^* . Мы сначала начертим траектории, заданные уравнениями (18) в плоскости P^* , и затем отобразим их обратно в плоскость P .

Наряду с фазовой траекторией (18) в плоскости P^* имеется траектория, задаваемая уравнениями

$$\xi^1 = c^1 e^{\lambda_1 t}, \quad \xi^2 = -c^2 e^{\lambda_2 t}, \quad (19)$$

а также траектория, задаваемая уравнениями

$$\xi^1 = -c^1 e^{\lambda_1 t}, \quad \xi^2 = c^2 e^{\lambda_2 t}. \quad (20)$$

Траектория (19) получается из траектории (18) зеркальным отражением относительно оси абсцисс, а траектория (20) — зеркальным отражением относительно оси ординат. Таким образом, указанные два зеркальных отражения оставляют картину траекторий на плоскости P^* неизменной. Из этого видно, что если начертить траектории в первом квадранте, то уже легко представить себе всю фазовую картину в плоскости P^* .

Заметим, что при $c^1 = c^2 = 0$ мы получаем движение точки, описывающее положение равновесия $(0, 0)$. При $c^2 = 0, c^1 > 0$ получаем движение, описывающее положительную полуось абсцисс, при $c^1 = 0, c^2 > 0$ получаем движение, описывающее положительную полуось ординат. Если $\lambda_1 < 0$, то движение, описывающее положительную полуось абсцисс, протекает в направлении *к началу координат*; если же $\lambda_1 \geq 0$, то движение это имеет противоположное направление — *от начала координат*. В первом случае точка движется, неограниченно приближаясь к началу координат, во втором — неограниченно удаляясь в бесконечность. То же справедливо и относительно движения, описывающего положительную полуось ординат. Если c^1 и c^2 положительны, то движение точки протекает в первом квадранте, не выходя на его границу.

Дальнейшее, более детальное описание фазовой плоскости проведем отдельно для нескольких случаев — в зависимости от знаков чисел λ_1, λ_2 .

А) Узел. Допустим, что оба числа λ_1 и λ_2 отличны от нуля и имеют один знак. Полагаем $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Разберем сначала случай, когда

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0.$$

При этих предположениях движение по положительной полуоси абсцисс направлено к началу координат, точно так же как движение по положительной полуоси ординат. Далее, движение по произвольной траектории внутри первого квадранта состоит в асимптотическом приближении точки к началу координат. Эта

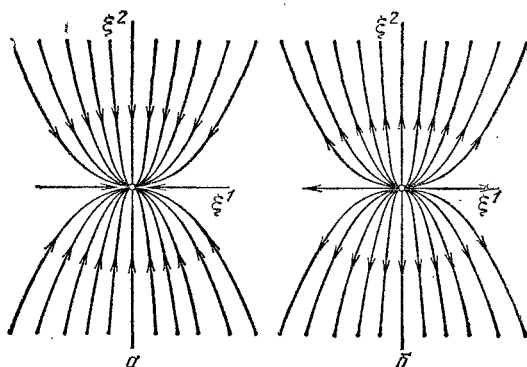


Рис 19

фазовая картина называется *устойчивым узлом* (рис. 19, а). Если выполнены неравенства

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0,$$

то траектории остаются прежними, но движение по ним направлено в противоположном направлении. Мы имеем *неустойчивый узел* (рис. 19, б).

В) Седло. Допустим, что числа λ_1 и λ_2 имеют противоположные знаки. Для определенности предположим, что

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2.$$

В этом случае движение по положительной полуоси абсцисс идет к началу координат, а движение по положительной полуоси ординат — от начала координат. Траектории, лежащие внутри первого квадранта, напоминают по своему виду гиперболы, а движения по ним происходят в направлении к началу вдоль оси

абсцисс и в направлении от начала вдоль оси ординат. Эта фазовая картина называется *седлом* (рис. 20), а траектории, состоящие из полуосей абсцисс и ординат, называют *усами седла*. При этом траектории,

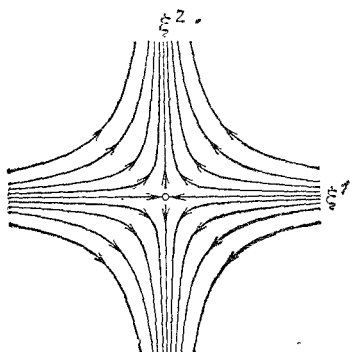


Рис. 20

асимптотически приближающиеся к началу координат, называются *устойчивыми* усами седла, а другие — *неустойчивыми* усами седла.

Рисунки 19, а, б и 20 дают картину траекторий на вспомогательной фазовой плоскости P^* . Расположение траекторий на фазовой плоскости P получается из этого с помощью линейного отображения и зависят от по-

ложения собственных векторов (см., например, рис. 21 и 22).

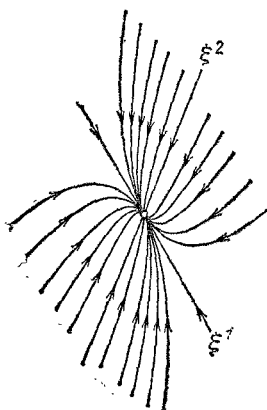


Рис. 21

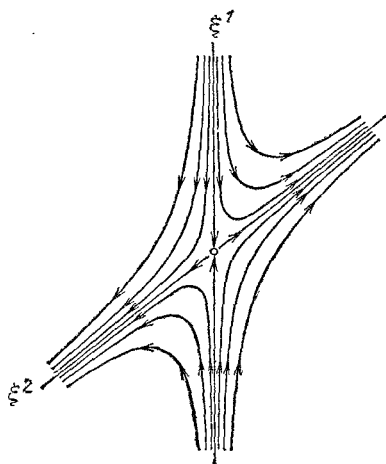


Рис. 22

Рассмотрим теперь случай, когда собственные значения матрицы A комплексны. В этом случае они комплексно сопряжены и могут быть обозначены через $\lambda = \mu + i\nu$ и $\bar{\lambda} = \mu - i\nu$, причем $\nu \neq 0$. Собственные векторы матрицы A могут быть выбраны сопря-

женными, так что их можно обозначить через $\mathbf{h}$ и $\bar{\mathbf{h}}$. Положим

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2} (\mathbf{h}_1 - i\mathbf{h}_2), \quad (21)$$

где $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ — действительные векторы. Векторы $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ линейно независимы, так как в случае линейной зависимости между ними мы имели бы линейную зависимость между $\mathbf{h}$ и $\bar{\mathbf{h}}$. Итак, векторы $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ можно принять за базис фазовой плоскости P уравнения (15).

Произвольное действительное решение уравнения (15) можно записать в виде

$$\mathbf{x} = c\mathbf{h}e^{\lambda t} + \bar{c}\bar{\mathbf{h}}e^{\bar{\lambda}t}, \quad (22)$$

где c — комплексная константа. Пусть

$$\xi = \xi^1 + i\xi^2 = ce^{\lambda t};$$

тогда мы имеем

$$\mathbf{x} = \xi^1 \mathbf{h}_1 + \xi^2 \mathbf{h}_2.$$

Отобразим линейно фазовую плоскость P на вспомогательную плоскость P^* комплексного переменного ξ так, чтобы вектор $\mathbf{h}_1$ перешел в единицу, а вектор $\mathbf{h}_2$ в i ; тогда вектору $\xi^1 \mathbf{h}_1 + \xi^2 \mathbf{h}_2$ будет соответствовать комплексное число $\xi = \xi^1 + i\xi^2$. В силу этого отображения фазовая траектория (22) перейдет в фазовую траекторию на плоскости P^* , описываемую уравнением

$$\dot{\xi} = ce^{\lambda t}. \quad (23)$$

С) Фокус и центр. Перепишем уравнение (23) в полярных координатах, положив

$$\xi = \rho e^{i\varphi}, \quad c = Re^{i\alpha}.$$

Таким образом, получаем

$$\dot{\rho} = Re^{\mu t}, \quad \dot{\varphi} = \nu t + \alpha;$$

это есть уравнение движения точки в плоскости P^* . При $\mu \neq 0$ каждая траектория оказывается *логарифмической спиралью*. Соответствующая картина на плоскости P называется *фокусом*. Если $\mu < 0$, то точка при возрастании t асимптотически приближается к началу координат, описывая логарифмическую спираль. Это — *устойчивый фокус* (рис. 23, а). Если

$\mu > 0$, то точка уходит от начала координат в бесконечность и мы имеем *неустойчивый фокус* (рис. 23, б). Если число μ равно нулю, то каждая фазовая траектория кроме положения равновесия $(0, 0)$ замкнута и мы имеем так называемый *центр* (рис. 24).

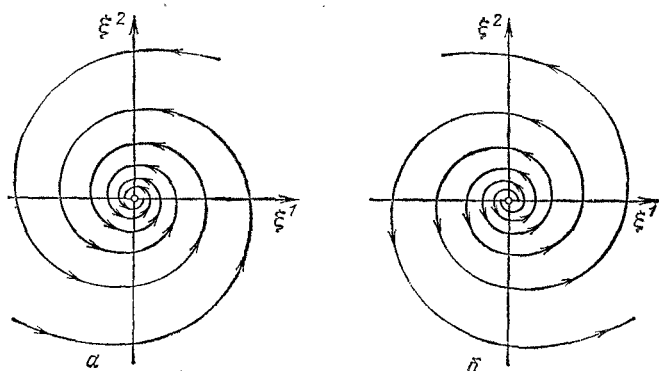


Рис. 23

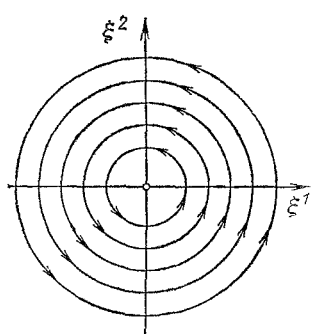


Рис. 24

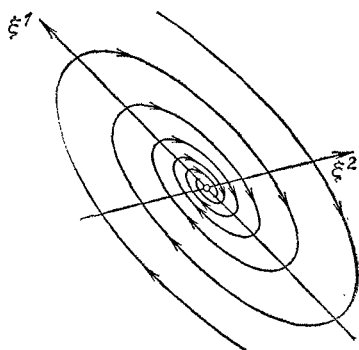


Рис. 25

Рисунки 23 и 24 дают картину во вспомогательной фазовой плоскости; в плоскости P картина линейно искажается (см., например, рис. 25 и 26).

Выше мы рассматривали так называемые невырожденные случаи: корни λ_1 и λ_2 различны и отличны от нуля. Малое изменение элементов матрицы $\|a_j^i\|$ не меняет в этих предположениях общего характера поведения фазовых траекторий. Исключение составляет

случай центра: при малом изменении элементов матрицы $\|a_j^i\|$ равенство $\mu = 0$ может нарушиться, и центр перейдет в устойчивый или неустойчивый фокус. Включение этого вырожденного случая (центра) в основной текст параграфа объясняется его важностью.

Если

$$\dot{x} = f(x),$$

где x — двумерный вектор, есть автономная система второго порядка и начало координат является положением ее равновесия, то поведение траекторий этой системы вблизи положения равновесия имеет тот же характер, что и для линейной системы, и определяется линейной частью функции $f(x)$ при условии, что $\det \left\| \frac{\partial f^i(x)}{\partial x^j} \right\| \neq 0$. При этом и в случае нелинейной системы невырожденное положение равновесия общей автономной системы имеет вид седла, узла, фокуса или центра. Для седла имеются усы: два устойчивых и два неустойчивых, но они не прямолинейные, а криволинейные. Устойчивый узел и устойчивый фокус является асимптотическим устойчивым положением равновесия, а неустойчивый узел и неустойчивый фокус — вполне неустойчивыми положениями равновесия.

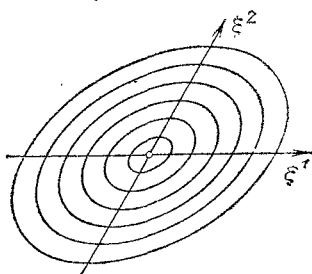


Рис. 26

Примеры

1. Каждое решение автономной системы уравнений

$$\dot{x} = -\omega y, \quad \dot{y} = \omega x$$

записывается в виде

$$x = r \cos(\omega t + \alpha), \quad y = r \sin(\omega t + \alpha), \quad (24)$$

где r и α — константы. Система уравнений (24) определяет в трехмерном пространстве R переменных t, x, y винтовую спираль при $r \neq 0$ и прямую линию (именно ось t) при $r = 0$.

В фазовой плоскости S переменных x и y та же система уравнений (24) определяет окружность при $r \neq 0$ и точку (положение равновесия) при $r = 0$.

Переход от кривых в пространстве R к кривым на плоскости S осуществляется проектированием в направлении оси t на координатную плоскость xu .

2. Каждое решение неавтономной системы уравнений

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = t$$

записывается в виде

$$x = t + a, \quad y = \frac{1}{2}t^2 + b, \quad (25)$$

где a и b — константы. Из общей теории известно (единственность решения), что в трехмерном пространстве R переменных t, x, y две кривые, определяемые системой уравнений (25), либо не пересекаются, либо совпадают. Для того чтобы получить проекцию кривой, определяемой системой (25), на плоскость S переменных x, y следует исключить t из системы (25). Производя это исключение, получаем

$$y = \frac{1}{2}(x - a)^2 + b.$$

Это уравнение определяет на плоскости xu параболу с осью, направленной вдоль положительной полуоси y , и вершиной в точке (a, b) . Две такие параболы — одна с вершиной в точке (a_1, b_1) , а другая с вершиной в точке (a_2, b_2) — не пересекаются лишь в случае, если $a_1 = a_2, b_1 \neq b_2$. Если же $a_1 \neq a_2$, то соответствующие параболы пересекаются (в одной точке). Пересечение траекторий происходит потому, что исходная система дифференциальных уравнений неавтономна. Поэтому изображение решений на плоскости xu в случае неавтономной системы нецелесообразно.

3 (Случай двукратного корня). Если матрица A системы (14) имеет лишь одно собственное значение λ , то возможны два существенно различных случая, при описании которых мы будем обозначать через A преобразование, соответствующее матрице A .

Случай I. В плоскости P существует базис h_1, h_2 , состоящий из двух собственных векторов преобразований A :

$$Ah_1 = \lambda h_1, \quad Ah_2 = \lambda h_2. \quad (26)$$

Случай II. В плоскости P существует такой базис h_1, h_2 , что

$$Ah_1 = \lambda h_1, \quad Ah_2 = \lambda h_2 + h_1. \quad (27)$$

Докажем это. Пусть h_1 — собственный вектор преобразования A и h_2 — произвольный вектор, не коллинеарный вектору h_1 . Тогда мы имеем

$$Ah_1 = \lambda h_1, \quad Ah_2 = \alpha h_1 + \mu h_2.$$

Из этого видно, что преобразование A имеет в базисе h_1, h_2 матрицу

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \alpha & \mu \end{pmatrix},$$

так что его собственными значениями являются λ и μ и потому $\mu = \lambda$. Если $\alpha = 0$, то для базиса h_1, h_2 выполнены соотношения (26). Если же $\alpha \neq 0$, то, заменив вектор h_1 коллинеарным ему вектором αh_1 , мы получим базис, удовлетворяющий условию (27).

Непосредственно проверяется, что в случае I общее решение уравнения (15) записывается в виде

$$x = c^1 h_1 e^{\lambda t} + c^2 h_2 e^{\lambda t} = x_0 e^{\lambda t}. \quad (28)$$

Написанное решение имеет начальное значение $(0, x_0)$. При $\lambda \neq 0$ каждое решение описывает полупрямую,

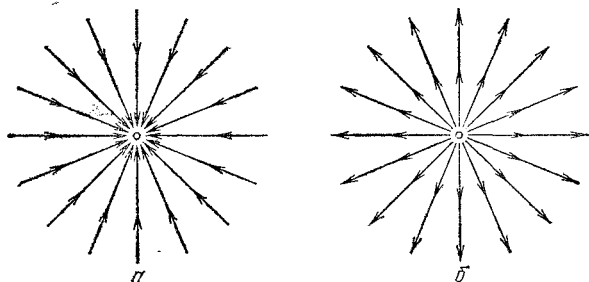


Рис. 27

выходящую из начала координат. При $\lambda < 0$ движение происходит в направлении к началу координат (рис. 27, а), а при $\lambda \geq 0$ — от начала координат (рис. 27, б).

Непосредственно проверяется также, что в случае II произвольное решение уравнения (15) имеет вид

$$x = c^1 h_1 e^{\lambda t} + c^2 (h_1 t + h_2) e^{\lambda t}.$$

Разлагая это решение по базису h_1, h_2 в виде $x = \xi^1 h_1 + \xi^2 h_2$, получаем уравнение траекторий в плоскости P относительно базиса h_1, h_2 :

$$\xi^1 = (c^1 + c^2 t) e^{\lambda t}, \quad \xi^2 = c^2 e^{\lambda t}. \quad (29)$$

Линейное отображение фазовой плоскости P , переводящее векторы h_1 и h_2 в единичные ортогональные векторы, направленные по осям координат плоскости P^* , переводит траектории плоскости P в траектории плоскости P^* , в которой уравнения (29) дают траектории уже в прямоугольных координатах.

Разберем случай $\lambda \neq 0$. Пусть сначала $\lambda < 0$. В этом случае рассмотрим траектории, заполняющие плоскость P^* . Прежде всего, из уравнений (29) видно, что, меняя одновременно знаки у c^1 и c^2 , мы получим симметрию плоскости P^* относительно начала координат, при которой траектории переходят в траектории. Таким образом, достаточно рассмотреть заполнение траекториями верхней полуплоскости. При $c^2 = 0, c^1 \neq 0$ получаем две траектории: одну при $c^1 > 0$, другую — при $c^1 < 0$. Первая совпадает с положительной полуосью абсцисс, вторая — с отрицательной полуосью абсцисс; движение по обеим направлено к началу координат. Рассмотрим, далее, траекторию $c^1 = 0, c^2 > 0$. Мы имеем

$$\xi^1 = c^2 t e^{\lambda t}, \quad \xi^2 = c^2 e^{\lambda t}. \quad (30)$$

При $t = 0$ получаем точку $(0, c^2)$ на оси ординат. При t , возрастающем от нуля, точка сначала движется направо, затем налево, все время опускаясь вниз к началу координат. При t , убывающем от нуля до $-\infty$, точка движется налево, одновременно поднимаясь вверх. Если в уравнениях (30) придавать константе c^2 все положительные значения, то описанные таким образом траектории заполняют всю верхнюю полуплоскость (рис. 28, а). Мы имеем здесь устойчивый узел. Если $\lambda > 0$, то траектории получаются из описанных путем зеркального отражения плоскости относительно оси ординат (рис. 28, б), а движение по ним идет в противоположном направлении, т. е. от начала координат. Это неустойчивый узел. На рис. 29, а, б показаны фазовые траектории в плоскости P .

4. Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0. \quad (31)$$

Заменяя это уравнение нормальной системой по способу, изложенному в § 4, получаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -bx - ay. \end{aligned} \quad (32)$$

Фазовую плоскость системы (32) считают фазовой плоскостью уравнения (31). Непосредственно проверяется, что характеристический многочлен системы

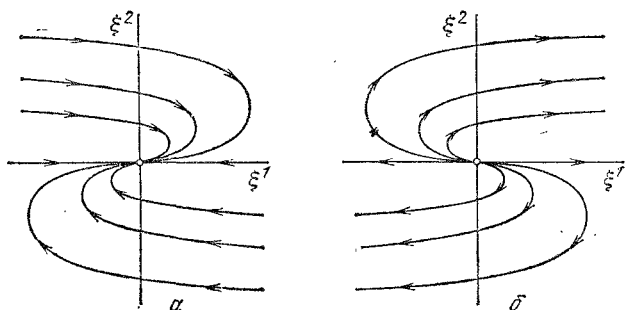


Рис. 28

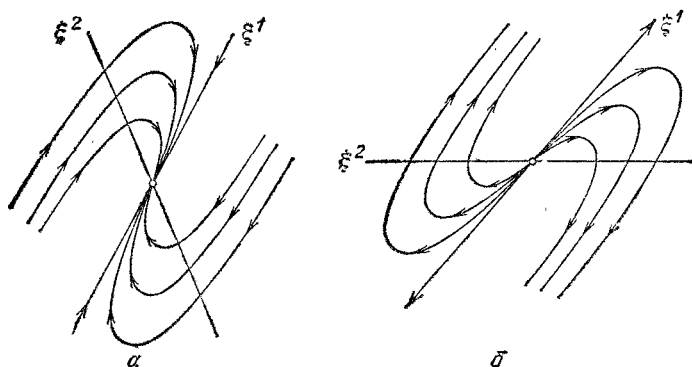


Рис. 29

(32) совпадает с характеристическим многочленом уравнения (31), т. е. равен

$$p^2 + ap + b. \quad (33)$$

Таким образом, если корни многочлена (33) комплексны, то фазовая плоскость уравнения (16) представляет собой фокус или центр. Рассмотрим фазовую плоскость в случае действительных различных и отличных от нуля корней многочлена.

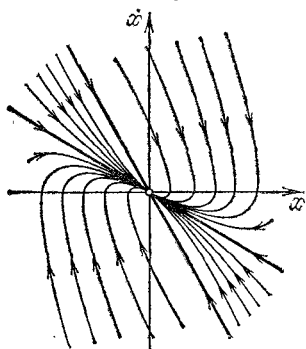


Рис. 30

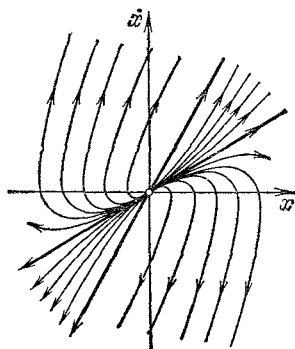


Рис. 31

Пусть λ — корень многочлена (33) и $h = (h^1, h^2)$ — соответствующий ему собственный вектор. Тогда имеем (учитывая вид системы (32))

$$h^2 = \lambda h^1.$$

Таким образом, собственное направление, соответствующее собственному значению λ , определяется прямой линией, имеющей уравнение

$$y = \lambda x;$$

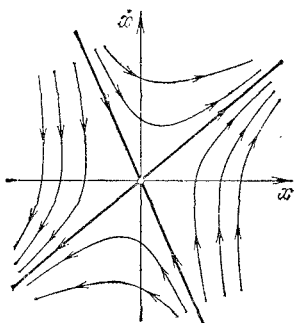


Рис. 32

мы будем называть ее *собственной прямой*.

Если корни λ_1 и λ_2 отрицательны, то мы имеем устойчивый узел (см. А)). В этом случае обе собственные прямые проходят во второй и четвертой четвертях; траектории вблизи начала координат касаются той из них, которая расположена ближе к оси абсцисс (рис. 30).

Если корни λ_1 и λ_2 положительны, то мы имеем неустойчивый узел (см. А)). Обе собственные прямые проходят в первой и третьей четвертях; вблизи на-

чала координат траектории касаются той из них, которая расположена ближе к оси абсцисс (рис. 31).

Если корни λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, то мы имеем седло; одна собственная прямая проходит во второй и четвертой четвертях, а другая — в первой и третьей. В направлении первой из этих прямых траектории приближаются к началу координат, а в направлении второй — отходят от него (рис. 32).

§ 16. Теорема Ляпунова

Здесь будут даны понятие устойчивости по Ляпунову и достаточные условия устойчивости применительно к положению равновесия автономной системы (см. § 15).

Устойчивость положения равновесия

Пусть

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \dots, x^n); \quad i = 1, \dots, n, \quad (34)$$

— нормальная автономная система и

$$\dot{x} = f(x) \quad (35)$$

— ее векторная запись. Относительно функций

$$f^i(x^1, \dots, x^n); \quad i = 1, \dots, n, \quad (36)$$

мы будем предполагать, что они определены и имеют непрерывные частные производные первого порядка на некотором открытом множестве Δ пространства переменных $x^1, \dots, x^n$. В дальнейшем при установлении критерия устойчивости требования дифференцируемости будут усилены: именно, будет предполагаться, что функции (36) имеют на множестве Δ непрерывные частные производные второго порядка.

Не давая формального определения устойчивости по Ляпунову, постараюсь прежде всего выразить идею устойчивости. Положение равновесия $a = (a^1, \dots, a^n)$ уравнения (35) следует считать *устойчивым*, если всякое решение уравнения (35), исходящее при $t = 0$ из точки, достаточно близкой к a , остается в течение всего дальнейшего своего изменения (т. е. при $t > 0$) вблизи точки a . Физический смысл устойчивости ясен. Физический объект (например, какая-либо машина), движения которого управляются уравнением (35),

может находиться в положении равновесия a лишь тогда, когда это положение равновесия устойчиво, так как в противном случае ничтожное отклонение от положения равновесия, вызванное случайным толчком, может повлечь уход объекта далеко от положения равновесия.

Ниже через $\varphi(t, \xi)$ будет обозначаться решение уравнения (35) с начальными значениями $t=0$, $x=\xi$, так что $\varphi(t, \xi)$ есть векторная функция скалярного переменного t и векторного переменного ξ , удовлетворяющая условию

$$\varphi(0, \xi) = \xi. \quad (37)$$

Определение. Положение равновесия a уравнения (35) называется *устойчивым по Ляпунову*, если: 1) существует настолько малое положительное число ρ , что при $|\xi - a| < \rho$ решение $\varphi(t, \xi)$ уравнения (35) определено для всех положительных t ; 2) для всякого положительного числа ε найдется такое положительное число $\delta < \rho$, что при $|\xi - a| < \delta$ имеем $|\varphi(t, \xi) - a| < \varepsilon$ при всех $t > 0$. Устойчивое по Ляпунову положение равновесия a уравнения (35) называется *асимптотически устойчивым*, если: 3) существует настолько малое положительное число $\sigma < \rho$, что при $|\xi - a| < \sigma$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi(t, \xi) - a| = 0.$$

Дадим прежде всего достаточные условия устойчивости положения равновесия для линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.

А) Пусть

$$\dot{x} = Ax \quad (38)$$

— линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами, взятое в векторной записи. Решение его с начальными значениями $0, \xi$ обозначим через $\psi(t, \xi)$. Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, то существуют такие положительные числа γ и r , что выполнено неравенство

$$|\psi(t, \xi)| \leq r |\xi| e^{-\gamma t}, \quad t \geq 0. \quad (39)$$

Из неравенства (39) непосредственно следует, что положение равновесия $x=0$ уравнения (38) является

устойчивым по Ляпунову и асимптотически устойчивым.

Докажем неравенство (39). Положим

$$A = \|a_j^i\|, \quad L(p) = \|a_j^i - p\delta_j^i\|.$$

Тогда, пользуясь символом дифференцирования p (см. § 8), можно записать уравнение (38) в скалярной форме в виде системы

$$L_\alpha^i(p) x^\alpha = 0; \quad i = 1, \dots, n. \quad (40)$$

Пусть $M_i^j(p)$ — минор элемента $L_j^i(p)$ матрицы $L(p)$, взятый с надлежащим знаком, так что выполнено тождество

$$M_\beta^k(p) L_j^\beta(p) = \delta_j^k D(p),$$

где $D(p)$ — детерминант матрицы $L(p)$. Умножая соотношение (40) на многочлен $M_i^k(p)$ и суммируя полученное соотношение по i , получаем

$$0 = M_\beta^k(p) L_\alpha^\beta(p) x^\alpha = \delta_\alpha^k D(p) x^\alpha = D(p) x^k.$$

Таким образом, если

$$x = (x^1, \dots, x^n)$$

— некоторое решение уравнения (38), то каждая функция x^i удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$D(p) x^i = 0.$$

Так как все корни многочлена $D(p)$ по предположению имеют отрицательные действительные части, то (см. § 10, А)) для функции x^i выполнено неравенство

$$|x^i| \leq R e^{-\gamma t}; \quad i = 1, \dots, n; \quad t \geq 0,$$

где R и γ — положительные числа, не зависящие от номера i . Из этого неравенства следует неравенство

$$|x| \leq \sqrt{n} R e^{-\gamma t} \quad (t \geq 0).$$

Пусть e_i — единичный координатный вектор с номером i , так что

$$e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0),$$

где единица стоит на i -м месте. Пусть, далее, $\psi_i(t)$ — решение уравнения (38) с начальным значением e_i ,

так что

$$\psi_i(0) = e_i; \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда решение $\psi(t, \xi)$ уравнения (38) с начальным значением

$$\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n),$$

очевидно, запишется в виде

$$\psi(t, \xi) = \xi^\alpha \psi_\alpha(t). \quad (41)$$

Так как для каждого решения $\psi_i(t)$ выполнено неравенство

$$|\psi_i(t)| \leq \sqrt{n} R e^{-\gamma t} \quad (t \geq 0),$$

то для решения $\psi(t, \xi)$, очевидно, выполнено неравенство (39).

Устойчивость по Ляпунову положения равновесия $x = 0$ непосредственно вытекает из неравенства (39). Действительно, если ε — заданное положительное число, то достаточно принять за δ число $\frac{\varepsilon}{r}$. Асимптотическая устойчивость также вытекает из неравенства (39).

Функция Ляпунова

При установлении критерия устойчивости положения равновесия *нелинейной системы* (34) пользуются так называемым *дифференцированием в силу системы уравнений*; дифференцирование это находит применение не только при доказательстве теоремы Ляпунова.

В) Пусть

$$F(x^1, \dots, x^n) = F(x)$$

— некоторая дифференцируемая функция переменных $x^1, \dots, x^n$, определенная на множестве Δ . Ее производная по t в силу системы уравнений (34) в точке $x = (x^1, \dots, x^n)$ определяется следующим образом. Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (35), удовлетворяющее при некотором значении $t = t_0$ начальному условию

$$\varphi(t_0) = x.$$

Производная

$$\dot{F}_{(34)}(x)$$

в силу системы (34) определяется формулой

$$\dot{F}_{(34)}(x) = \frac{d}{dt} F(\varphi(t))|_{t=t_0}$$

или в соответствии с формулой полной производной

$$\dot{F}_{(34)}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(x)}{\partial x^i} f^i(x). \quad (42)$$

Из формулы (42) видно, что $\dot{F}_{(34)}(x)$ не зависит от решения $\varphi(t)$, а однозначно определяется выбором точки x .

Докажем теперь одно свойство автономной системы.

С) Решение автономного уравнения (35) с начальными значениями 0, ξ по-прежнему будем обозначать через $\varphi(t, \xi)$. Оказывается, что функция $\varphi(t, \xi)$ удовлетворяет тождеству

$$\varphi(t, \varphi(s, \xi)) = \varphi(s + t, \xi). \quad (43)$$

Это утверждение означает, что любую точку на траектории можно принять за начальную, изменив при этом отсчет времени.

Докажем формулу (43). Положим

$$\eta = \varphi(s, \xi), \quad (44)$$

где s — фиксированное число, и рассмотрим решение

$$\varphi_1(t) = \varphi(t, \eta)$$

уравнения (35). Так как $\varphi(t, \xi)$ — решение уравнения (35), то в силу автономности этого уравнения (см. § 15, А)) решением является и функция $\varphi_2(t)$, определяемая соотношением

$$\varphi_2(t) = \varphi(t + s, \xi).$$

Мы имеем, таким образом, два решения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ уравнения (35). Далее,

$$\varphi_1(0) = \varphi(0, \eta) = \eta$$

(см. (37)),

$$\varphi_2(0) = \varphi(s, \xi) = \eta$$

[(см. (44))]. Таким образом, решения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют общие начальные значения и потому совпадают, а это и означает, что соотношение (43) выполнено.

В доказательстве теоремы Ляпунова основную роль играет некоторая положительно определенная квадратичная форма, называемая *функцией Ляпунова*. Отметим сначала некоторые свойства положительно определенных квадратичных форм (см. D)), а затем построим и саму функцию Ляпунова (см. E)).

D) Пусть

$$\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n) \quad (45)$$

— переменный вектор n -мерного пространства. *Квадратичной формой* от вектора $\mathbf{x}$ называется его функция $W(\mathbf{x})$, определяемая формулой

$$W(\mathbf{x}) = w_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta,$$

где $w_{ij} = w_{ji}$ — действительные числа. Квадратичная форма $W(\mathbf{x})$ называется *положительно определенной*, если при $\mathbf{x} \neq 0$ имеем

$$W(\mathbf{x}) > 0.$$

Оказывается, что для любой положительно определенной квадратичной формы $W(\mathbf{x})$ всегда можно подобрать два таких положительных числа μ, ν , что для произвольного вектора $\mathbf{x}$ имеют место неравенства

$$\mu |\mathbf{x}|^2 \leq W(\mathbf{x}) \leq \nu |\mathbf{x}|^2. \quad (46)$$

Из этого следует, что для произвольного $\mathbf{x}$ (см. (45)) имеет место неравенство

$$|x^i| \leq \sqrt{\frac{1}{\mu} W(\mathbf{x})}. \quad (47)$$

Докажем существование чисел μ и ν . Для этого рассмотрим значения функции $W(\xi)$, когда вектор ξ принадлежит единичной сфере, т. е. удовлетворяет условию

$$|\xi| = 1. \quad (48)$$

Так как сфера (48) представляет собой замкнутое ограниченное множество, а функция $W(\xi)$ непрерывна, то на сфере (48) она достигает своего минимума μ и своего максимума ν . Так как все векторы сферы (48) отличны от нуля, то числа μ и ν положительны. Пусть $\mathbf{x}$ — произвольный вектор; тогда мы имеем $\mathbf{x} = \lambda \xi$, где вектор ξ принадлежит сфере (48), и потому для вектора ξ выполнены неравенства

$$\mu \leq W(\xi) \leq \nu.$$

Умножая это неравенство на λ^2 , получаем неравенства (46).

Перейдем теперь к построению функции Ляпунова.

Е) Пусть

$$\dot{x}^i = a_\alpha^i x^\alpha; \quad i = 1, \dots, n, \quad (49)$$

— линейная однородная система уравнений с постоянными коэффициентами, причем все собственные значения матрицы $A = \|a_\alpha^i\|$ имеют отрицательные действительные части. Тогда существует положительно определенная квадратичная форма $W(x)$, производная которой в силу системы (49) (см. В)) удовлетворяет неравенству

$$\dot{W}_{(49)}(x) \leq -cW(x), \quad (50)$$

где x — произвольный вектор, а c — положительное число, не зависящее от вектора x .

Построим форму $W(x)$. Будем считать, что система (49) есть скалярная запись векторного уравнения (38). Решение уравнения (38) с начальными значениями 0, ξ будем, как и в предложении А), обозначать через $\psi(t, \xi)$, тогда мы имеем

$$\psi(t, \xi) = \xi^\alpha \psi_\alpha(t) \quad (51)$$

(см. (41)). Положим теперь

$$W(\xi) = \int_0^\infty |\psi(\tau, \xi)|^2 d\tau. \quad (52)$$

В силу (51)

$$W(\xi) = \xi^\alpha \xi^\beta \int_0^\infty (\psi_\alpha(\tau), \psi_\beta(\tau)) d\tau. \quad (53)$$

Так как каждая функция $\psi_i(t)$ удовлетворяет неравенству (39), то каждый несобственный интеграл, стоящий в правой части равенства (53), сходится, и потому $W(\xi)$ есть квадратичная форма относительно вектора ξ . Эта квадратичная форма является положительно определенной, так как при $\xi \neq 0$ подинтегральное выражение в формуле (52) положительно и, следовательно, $W(\xi) > 0$. Вычислим теперь производную $\dot{W}_{(49)}(\xi)$ функции $W(\xi)$ в силу системы (49). Для этого согласно предложению В) проведем

через точку ξ решение $\psi(t, \xi)$ и затем вычислим производную функции $W(\psi(t, \xi))$ при $t=0$. Заметим предварительно, что в силу С)

$$\psi(\tau, \psi(t, \xi)) = \psi(\tau + t, \xi),$$

так что

$$\begin{aligned} W(\psi(t, \xi)) &= \int_0^\infty |\psi(\tau, \psi(t, \xi))|^2 d\tau = \\ &= \int_0^\infty |\psi(t + \tau, \xi)|^2 d\tau = \int_t^\infty |\psi(\tau, \xi)|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} \dot{W}_{(49)}(\xi) &= \frac{d}{dt} W(\psi(t, \xi))|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} \int_t^\infty |\psi(\tau, \xi)|^2 d\tau|_{t=0} = -|\psi(t, \xi)|^2|_{t=0} = -|\xi|^2. \end{aligned}$$

Итак, мы получили равенство

$$\dot{W}_{(49)}(\xi) = -|\xi|^2,$$

но в силу второго из неравенств (46), имеем.

$$-|\xi|^2 \leq -\frac{1}{\nu} W(\xi)$$

и потому получаем

$$\dot{W}_{(49)}(\xi) \leq -\frac{1}{\nu} W(\xi).$$

Таким образом, неравенство (50) доказано.

Теорема Ляпунова

Перейдем, наконец, к формулировке и доказательству теоремы Ляпунова.

Пусть

$$a = (a^1, \dots, a^n)$$

— положение равновесия автономной системы (34).

Положим

$$x^i = a^i + \Delta x^i; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (54)$$

и примем за новые неизвестные функции величины

$$\Delta x^1, \dots, \Delta x^n. \quad (55)$$

Производя подстановку (54) в системе (34) и разлагая правые части в ряд Тейлора по переменным (55), получаем

$$\Delta \dot{x}^i = f^i(a) + \frac{\partial f^i(a)}{\partial x^\alpha} \Delta x^\alpha + R^i; \quad i = 1, \dots, n, \quad (56)$$

где R^i — член второго порядка малости относительно неизвестных (55). Так как a есть положение равновесия системы (34), то

$$f^i(a) = 0;$$

далее, полагая

$$a_j^i = \frac{\partial f^i(a)}{\partial x^j}, \quad (57)$$

мы можем записать систему (56) в виде

$$\Delta \dot{x}^i = a_\alpha^i \Delta x^\alpha + R^i; \quad i = 1, \dots, n. \quad (58)$$

Теорема 11. Если все собственные значения матрицы $A = \|a_j^i\|$ (см. (57)) имеют отрицательные действительные части, то положение равновесия a системы (34) асимптотически устойчиво; более полно, существует настолько малое положительное число σ , что при $|\xi - a| < \sigma$ имеет место неравенство

$$|\varphi(t, \xi) - a| \leq r |\xi - a| e^{-\gamma t}, \quad (59)$$

где r и γ — положительные числа, не зависящие от ξ .

Доказательство. Будем считать, что положение равновесия a системы (34) совпадает с началом координат, т. е. что $a = 0$. Этого всегда можно достичь, произведя параллельный перенос системы координат; при этом матрица A не изменится. Предполагая, что $a = 0$, мы имеем

$$\Delta x^i = x^i,$$

и потому система (58) записывается в виде

$$\dot{x}^i = a_\alpha^i x^\alpha + R^i; \quad i = 1, \dots, n, \quad (60)$$

где

$$R^i = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^i(\theta_i x)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} x^\alpha x^\beta.$$

Пусть теперь $W(x)$ — функция Ляпунова (см. Е)) для линейной системы

$$\dot{x}^i = a_{\alpha}^i x^{\alpha}; \quad i = 1, \dots, n, \quad (61)$$

получаемой из системы (60) линеаризацией, т. е. отбрасыванием остаточных членов R^i . Вычислим производную $\dot{W}_{(60)}(x)$ функции $W(x)$ в силу системы (60). Мы имеем

$$\begin{aligned} \dot{W}_{(60)}(x) &= \frac{\partial W(x)}{\partial x^{\alpha}} a_{\beta}^{\alpha} x^{\beta} + \frac{\partial W(x)}{\partial x^{\alpha}} R^{\alpha} = \\ &= \dot{W}_{(61)}(x) + \frac{\partial W(x)}{\partial x^{\alpha}} R^{\alpha}. \end{aligned}$$

Так как функция $W(x)$ удовлетворяет условию (50), то мы имеем

$$\dot{W}_{(60)}(x) \leq -cW(x) + \frac{\partial W(x)}{\partial x^{\alpha}} R^{\alpha}.$$

Выберем теперь настолько малое положительное число b , чтобы при

$$W(x) \leq b \quad (62)$$

вектор x принадлежал множеству Δ (такое число b существует в силу (46)). Вторые производные $\frac{\partial^2 f^i(x)}{\partial x^i \partial x^k}$, будучи непрерывными функциями, ограничены в эллипсоиде (62) и потому в этом эллипсоиде

$$|R^i| \leq k|x|^2 \leq \frac{k}{\mu} W(x),$$

где k — некоторая константа. Далее, так как $\frac{\partial W(x)}{\partial x^i}$ — линейная форма относительно $x^1, \dots, x^n$, то

$$\left| \frac{\partial W(x)}{\partial x^i} \right| \leq l \sqrt{W(x)},$$

где l — некоторая константа (см. (47)). Таким образом, существует такое положительное число q , что при $W(x) \leq b$ мы имеем

$$\frac{\partial W(x)}{\partial x^{\alpha}} R^{\alpha} \leq qW(x)^{3/2}.$$

Выберем теперь положительное число c_1 таким образом, чтобы было

$$c_1 \leq b, \quad q\sqrt{c_1} \leq \frac{c}{2}.$$

Тогда мы будем иметь

$$\dot{W}_{(60)}(x) \leq -\frac{c}{2} W(x),$$

если только выполнено неравенство

$$W(x) \leq c_1. \quad (63)$$

Полагая $c_2 = \frac{c}{4}$, получаем неравенство

$$\dot{W}_{(60)}(x) \leq -2c_2 W(x),$$

справедливое, если для x выполнено неравенство (63).

Пусть ξ — внутренняя точка эллипсоида (63), т. е. точка, удовлетворяющая неравенству

$$W(\xi) < c_1. \quad (64)$$

Решение системы (60) с начальными значениями 0, ξ , как и раньше, обозначим через $\varphi(t, \xi)$ и положим

$$\omega(t) = W(\varphi(t, \xi)).$$

Функция $\omega(t)$ определена для всех тех значений $t \geq 0$, для которых определено решение $\varphi(t, \xi)$, и в силу B) она удовлетворяет условию

$$\dot{\omega}(t) \leq -2c_2 \omega(t), \quad (65)$$

до тех пор пока для нее выполнено неравенство

$$\omega(t) \leq c_1. \quad (66)$$

Если бы решение $\varphi(t, \xi)$ существовало не для всех положительных значений t , то точка $x = \varphi(t, \xi)$ непременно должна была бы при возрастающем t покинуть эллипсоид (63). Для доказательства этого обозначим через t_1 верхний предел значений t , для которых решение существует, так что при $t < t_1$ решение $\varphi(t, \xi)$ существует. Тогда решение $\varphi(t)$ также существует при всех $t \leq t_1$ и $\varphi(t_1, \xi)$ должно принадлежать границе эллипсоида, так как в противном случае решение $\varphi(s, \varphi(t_1, \xi))$ при достаточно малом s существует и, следовательно, решение существует при $t_1 + s$ и лежит внутри эллипсоида. Допустим, что точка $x = \varphi(t, \xi)$ покидает этот эллипсоид и пусть $t' > 0$ — то значение t , при котором она впервые попадает на его границу. Тогда на отрезке $0 \leq t \leq t'$ точка $\varphi(t, \xi)$ принадлежит эллипсоиду (63), и потому выполнено неравенство (65), так что $\dot{\omega}(t)$ неположи-

тельно. Следовательно, $c = \overline{w(t)} \leq w(0) < c$, что противоречиво.

Таким образом, решение $\varphi(t, \xi)$, а вместе с ним и функция $w(t)$ определены для всех положительных значений t и для всех этих значений выполнено неравенство (65). Если $\xi \neq 0$, то $w(t) > 0$ и мы можем произвести следующие выкладки исходя из неравенства (65):

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} \leq -2c_2, \quad \int_0^t \frac{\dot{w}(t)}{w(t)} dt \leq -2c_2 t \quad \text{при } t \geq 0,$$

$$\ln w(t) - \ln w(0) \leq -2c_2 t.$$

Последнее неравенство дает

$$W(\varphi(t, \xi)) \leq W(\xi) e^{-2c_2 t}.$$

Из этого неравенства, используя неравенство (46), получаем

$$|\varphi(t, \xi)|^2 \leq \frac{\nu}{\mu} |\xi|^2 e^{-2c_2 t}, \quad t \geq 0, \quad (67)$$

причем это верно, если только для ξ выполнено неравенство (64).

В силу второго из неравенств (46) из соотношения

$$|\xi| < \sigma = \sqrt{\frac{c_1}{\nu}} \quad (68)$$

следует неравенство (64). Таким образом, если выполнено неравенство (68), то верно неравенство (67). Извлекая из него квадратный корень, получаем неравенство

$$|\varphi(t, \xi)| \leq \sqrt{\frac{\nu}{\mu}} |\xi| e^{-c_2 t}, \quad t \geq 0,$$

которое совпадает с неравенством (59), причем

$r = \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}$, а $a = 0$. Итак, теорема 11 доказана.

Нижеследующее предложение F) описывает случай, в некотором смысле противоположный рассмотренному в теореме 11.

F) Положение равновесия a уравнения (35) будем называть *вполне неустойчивым*, если существует такое положительное число σ , что всякое решение $\varphi(t, \xi)$ уравнения (35), начинающееся в точке $\xi \neq a$ шара $|\xi - a| \leq \sigma$, обязательно покидает этот шар и

больше в него уже не возвращается, т. е. найдется такое положительное число $T = T(\xi)$, что при $t = T$ решение $\varphi(t, \xi)$ определено, и для всех значений $t > T$, для которых это решение определено, оно удовлетворяет неравенству $|\varphi(t, \xi) - a| \geq \sigma$. Оказывается, что если все собственные значения матрицы $\left\| \frac{\partial f^i(a)}{\partial x^j} \right\|$ имеют положительные действительные части, то положение равновесия a уравнения (35) является вполне неустойчивым.

Для доказательства предложения F) используем некоторые результаты, установленные в процессе доказательства теоремы 11; при этом, как и раньше, будем считать, что $a = 0$. Для этого наряду с уравнением (35), для которого по предположению все собственные значения матрицы $\left\| \frac{\partial f^i(a)}{\partial x^j} \right\|$ имеют положительные действительные части, рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = -f(x), \quad (69)$$

для которого точка 0, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы 11. В силу конструкции, данной при доказательстве теоремы 11, для уравнения (69) существует функция Ляпунова $W(x)$, удовлетворяющая неравенству

$$\dot{W}_{(69)}(x) \leq -2c_2 W(x)$$

при условии (63). Выписывая левую часть этого неравенства в явном виде (см. (42)), получаем

$$\dot{W}_{(69)}(x) = \frac{\partial W(x)}{\partial x^\alpha} (-f^\alpha(x)) \leq -2c_2 W(x),$$

или, иначе,

$$\dot{W}_{(34)}(x) \geq 2c_2 W(x).$$

Это неравенство заведомо верно, когда выполнено неравенство (63). Пусть теперь ξ — некоторая внутренняя точка эллипсоида (63) (см. (64)). Положим

$$w(t) = W(\varphi(t, \xi)).$$

Для функции $w(t)$ выполнено неравенство

$$\dot{w}(t) \geq 2c_2 w(t), \quad (70)$$

когда для нее имеет место неравенство

$$w(t) \leq c_1.$$

Так как $\xi \neq 0$, то $w(t) > 0$ и можно произвести следующие выкладки исходя из неравенства (70):

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} \geq 2c_2, \quad \int_0^t \frac{\dot{w}(t)}{w(t)} dt \geq 2c_2 t \quad \text{при } t \geq 0,$$

$$w(t) \geq w(0) e^{2c_2 t}, \quad W(\varphi(t, \xi)) \geq W(\xi) e^{2c_2 t}.$$

Из последнего неравенства следует, что при росте t точка $x = \varphi(t, \xi)$ непременно выйдет на границу эллипсоида (63) и, следовательно, покинет его внутренность. Покажем, что после этого она уже не вернется внутрь эллипсоида (63). Допустим противоположное; тогда найдется такое положительное значение t' , что $w(t') = c_1$, а при всех положительных достаточно малых значениях Δt выполнено неравенство $w(t' + \Delta t) < c_1$. Из последних двух соотношений следует, что $\dot{w}(t') \leq 0$, а это противоречит неравенству (70), которое верно при $t = t'$, так как $w(t') = c_1$.

Таким образом, доказано, что траектория $x = \varphi(t, \xi)$, где $\xi \neq 0$ — внутренняя точка эллипсоида (63), обязательно уходит из эллипсоида (63) и больше в него уже не возвращается. В силу второго из неравенств (46), из неравенств (68) следует неравенство (64), так что шар (68) содержится в эллипсоиде (63). Ввиду этого из доказанного следует правильность утверждения F).

Пример

В дополнение к предложению A) покажем, что если матрица A имеет собственное значение λ с положительной действительной частью, то положение равновесия $x = 0$ уравнения (38) уже не является устойчивым по Ляпунову. Действительно, векторная функция $x = che^{\lambda t}$ является решением уравнения (38), где c — произвольная действительная константа, а h — собственный вектор матрицы A с собственным значением λ . Это проверяется непосредственно. Если λ — действительное число, то при достаточно малом c указанное решение начинается в точке ch , сколь угодно близкой к положению равновесия $x = 0$, но с течением времени становится сколь угодно большим по модулю. Если же λ — комплексное число, то тем же свойством обладает решение $c(he^{\lambda t} + \bar{h}e^{\bar{\lambda}t})$ уравнения (38).

§ 17. Предельные циклы

В этом параграфе будет определено и до некоторой степени изучено понятие *предельного цикла*, введенное великим французским математиком Пуанкаре, а также дан один критерий, позволяющий в некоторых случаях установить существование предельного цикла. Понятие предельного цикла играет важнейшую роль как в самой теории обыкновенных дифференциальных уравнений, так и в ее приложениях к технике.

Мы будем рассматривать нормальную автономную [(см. § 15) систему уравнений

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, x^2); \quad i = 1, 2, \quad (71)$$

правые части которых определены и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ на некотором открытом множестве Δ фазовой плоскости R переменных x^1, x^2 . Мы будем пользоваться также векторной записью этой системы:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (72)$$

При рассмотрении фазовой плоскости будут играть существенную роль геометрические построения, обладающие большой наглядностью. Случай, когда открытое множество Δ совпадает со всей фазовой плоскостью P , отнюдь не является тривиальным, и для простоты можно сосредоточить все внимание на нем.

Предельный цикл и поведение траектории вблизи него

Предельным циклом уравнения (72) называется изолированное периодическое решение этого уравнения. Более полно, пусть $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ — периодическое решение уравнения (72) и K — описываемая этим решением замкнутая кривая в плоскости P . Решение $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ (а также траектория K) считается *изолированным* периодическим решением и называется *предельным циклом*, если существует такое положительное число ρ , что, какова бы ни была точка ξ плоскости P , находящаяся от кривой K на положительном расстоянии, меньшем, чем ρ , решение уравнения

(72), проходящее через точку ξ , не является периодическим.

Сказанное означает геометрически, что в фазовой картине уравнения (72) на плоскости P вблизи замкнутой траектории K не проходит других замкнутых траекторий этого уравнения. Вопрос о том, как ведут себя траектории уравнения (72) вблизи предельного цикла K , решается следующей теоремой.

Теорема 12. Пусть $x = \varphi(t)$ — предельный цикл уравнения (72) и K — замкнутая траектория, описываемая этим решением на плоскости P . Замкнутая кривая, как известно, разбивает плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю, а так как траектории уравнения (72) не могут пересекаться между собой, то каждая отличная от K траектория является

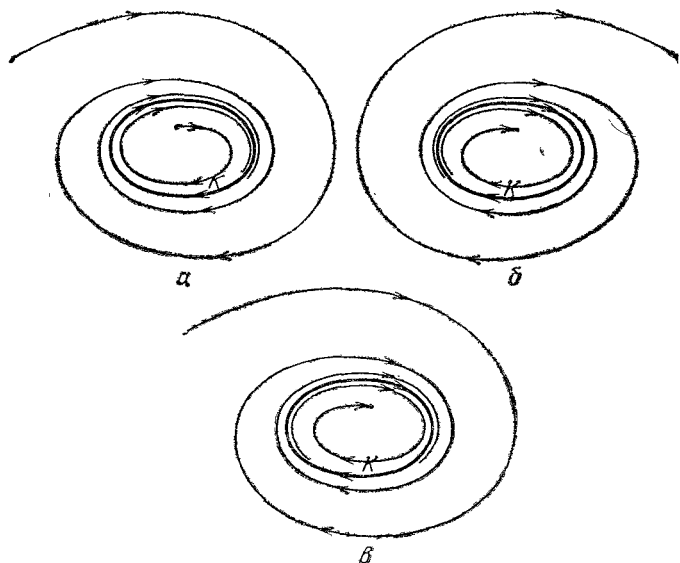


Рис. 33

внутренней или внешней по отношению к траектории K . Оказывается, что как для внешних, так и для внутренних траекторий имеются две взаимно исключающие друг друга возможности поведения вблизи K . Именно: все внутренние траектории, начинающиеся вблизи K , наматываются на K , как спирали, либо при $t \rightarrow +\infty$ (рис. 33, а), либо при $t \rightarrow -\infty$ (рис. 33, б),

То же самое имеет место и для внешних траекторий (рис. 33, а, б).

Если все траектории (как внешние, так и внутренние), начинающиеся вблизи K , наматываются на K при $t \rightarrow +\infty$, то предельный цикл называется *устойчивым* (рис. 33, а). Если все траектории, начинающиеся вблизи K , наматываются на K при $t \rightarrow -\infty$, то предельный цикл K называется вполне неустойчивым (рис. 33, б); в двух других случаях (т. е. если внутренние траектории наматываются на K при $t \rightarrow -\infty$, а внешние — при $t \rightarrow +\infty$ или наоборот) предельный цикл K называется *полуустойчивым* (рис. 33, в).

Как само доказательство теоремы 12, так и более полное описание «наматывания» траекторий на предельный цикл опираются на понятие *функции последования*. Эта функция имеет наглядный геометрический смысл и без детального доказательства ее свойств может быть описана сравнительно коротко.

Дадим это описание. Пусть K — замкнутая кривая на фазовой плоскости P , соответствующая периодическому решению с периодом τ . Пусть, далее, L — прямолинейный отрезок в плоскости P , пересекающий кривую K , не касаясь ее, в единственной точке a , внутренней для отрезка L . На отрезке L (точнее, на прямой, содержащей этот отрезок) обычным образом введем числовую координату. Координату точки a обозначим через u_0 . Через точку p отрезка L с координатой u проведем траекторию уравнения (72) и будем двигаться по ней в направлении возрастания времени t .

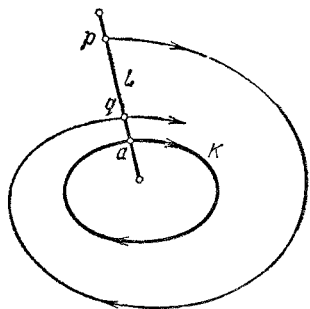


Рис. 34

Из второй части теоремы 2 следует, что если точка p близка к a , то мы будем двигаться вблизи кривой K , и потому вновь и вновь будем встречать отрезок L . Первая встреча произойдет через время, близкое к τ , в некоторой точке q (рис. 34), координату которой мы обозначим через $\chi_1(u)$. Точно так же, если мы будем двигаться из точки p по траектории в направлении убывания времени, то через время, близкое к τ , мы впервые встретим отрезок L в неко-

торой точке r , координату которой обозначим через $\chi_{-1}(u)$. Обе функции χ_1 и χ_{-1} непрерывны и взаимно обратны, т. е.

$$\chi_{-1}(\chi_1(u)) = u, \quad \chi_1(\chi_{-1}(u)) = u.$$

Действительно, если двигаться из точки q в направлении убывания времени, то мы впервые встретим отрезок L в точке p , так что $\chi_{-1}(\chi_1(u)) = u$. Точно так же, при движении из точки r в направлении возрастания времени мы впервые встретим отрезок L в точке p , т. е. $\chi_1(\chi_{-1}(u)) = u$. Функция $\chi = \chi_1$ называется *функцией последования*; для дальнейшего существенно, что она непрерывна и имеет непрерывную обратную функцию $\chi^{-1} = \chi_{-1}$.

В действительности функции χ и χ^{-1} имеют непрерывные производные. Это следует из теоремы 2, но это их свойство не будет использовано при доказательстве теоремы 12.

Приведенные здесь геометрические соображения наглядно достаточно убедительны.

Доказательство теоремы 12. Выберем из фазовой плоскости P прямолинейный отрезок L , пересекающий кривую K , не касаясь ее, в единственной точке a , внутренней для отрезка L . Введем на отрезке L числовую координату и обозначим через u_0 координату точки a . Для определенности будем считать, что точкам отрезка L , лежащим вне кривой K , соответствуют координаты, большие u_0 , а точкам, лежащим внутри K , — координаты, меньшие u_0 . Через χ обозначим функцию последования, соответствующую отрезку L (см. В)).

Таким образом, для всех чисел достаточно малого интервала $|u - u_0| < \alpha$ траектория уравнения (72), начинающаяся на отрезке L в точке p с координатой u , при возрастании времени впервые пересекает отрезок L в точке q с координатой $\chi(u) = v$.

Мы имеем, очевидно,

$$\chi(u_0) = u_0.$$

Далее, если для числа u выполнено равенство

$$\chi(u) = u, \quad (73)$$

то траектория, начинающаяся в точке p с координатой u , замкнута. Так как по предположению траектория K является изолированной замкнутой траекто-

рий, то существует настолько малое положительное число α , что при $|u - u_0| < \alpha$ уравнение (73) имеет единственное решение $u = u_0$. Из этого следует, что для всех точек интервала $u_0 < u < u_0 + \alpha$ имеет место одно из неравенств

$$\chi(u) < u, \quad (74)$$

$$\chi(u) > u. \quad (75)$$

В самом деле, если бы для некоторых точек этого интервала имело место неравенство (74), а для некоторых — неравенство (75), то в силу непрерывности функции χ на том же интервале нашлась бы точка u , для которой выполняется равенство (73), что невозможно. Так как траектория, начинающаяся в точке p с координатой u , принадлежащей интервалу $u_0 < u < u_0 + \alpha$, не может пересечь траекторию K , то обе точки p и q лежат по одну сторону кривой K (а именно вне K), так что

$$\chi(u) > u_0. \quad (76)$$

Рассмотрим теперь случай, когда для всех точек интервала $u_0 < u < u_0 + \alpha$ имеет место неравенство (74). Пусть u_1 — произвольное число этого интервала. Определим индуктивно последовательность чисел $u_1, u_2, \dots$, положив

$$u_{i+1} = \chi(u_i); \quad i = 1, 2, \dots \quad (77)$$

В силу неравенств (74) и (76) эти числа расположены на интервале $u_0 < u < u_0 + \alpha$ и образуют убывающую последовательность. Следовательно, они имеют некоторый предел u^* . Переходя в равенстве (77) к пределу при $i \rightarrow \infty$, получаем $\chi(u^*) = u^*$, а так как точка u^* принадлежит интервалу $|u - u_0| < \alpha$, то в силу единственности решения уравнения (73) на этом интервале $u^* = u_0$. Итак, $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = u_0$.

Обозначив через p_i точку отрезка L с координатой u_i , мы видим, что последовательные точки $p_1, p_2, \dots$ пересечения траектории, начинающейся в p_1 , с отрезком L сходятся к точке a , лежащей на траектории K . Так как время перехода по нашей траектории от точки p_i до точки p_{i+1} близко к периоду τ предельного цикла K (и, в частности, ограничено), то при росте i весь отрезок траектории от точки p_i до точки p_{i+1} прижимается к траектории K (см. теорему 2). Это

и значит, что траектория, начинающаяся в точке p_1 , спирально наматывается на траекторию K при $t \rightarrow +\infty$. Таким образом, доказано, что при выполнении неравенства (74) траектория, начинающаяся в любой точке отрезка L с координатой u , принадлежащей интервалу $u_0 < u < u_0 + \alpha$, спирально наматывается на K при $t \rightarrow +\infty$.

Если на интервале $u_0 < u < u_0 + \alpha$ имеет место неравенство (75), то для обратной к χ функции χ^{-1} на некотором интервале $u_0 < v < u_0 + \beta$ имеет место неравенство

$$\chi^{-1}(v) < v.$$

Исходя из него, мы точно так же покажем, что в этом случае любая траектория, начинающаяся в точке отрезка L с координатой v , принадлежащей интервалу $u_0 < v < u_0 + \beta$, спирально наматывается на траекторию K при $t \rightarrow -\infty$.

Аналогично исследуется поведение траекторий, начинающихся на отрезке L в точках с координатами u из достаточно малого интервала $u_0 > u > u_0 - \gamma$.

Так как каждая траектория, проходящая достаточно близко от траектории K , пересекает отрезок L в некоторой точке с координатой, достаточно близкой к u_0 , то мы разобрали поведение всех траекторий, близких к предельному циклу.

Таким образом, теорема 12 полностью доказана.

Большую привлекательность имеет геометрическое изучение функции последования $\chi(u)$. Изобразим ее в виде графика уравнения

$$v = \chi(u) \quad (78)$$

в плоскости переменных u, v , считая при этом для удобства, что $u_0 > 0$. Для того чтобы изучить решение уравнения (73), мы рассмотрим наряду с кривой (78) биссектрису первого координатного угла

$$v = u \quad (79)$$

(рис. 35). Для нахождения всех решений уравнения (73) следует найти все точки пересечения линий (78)

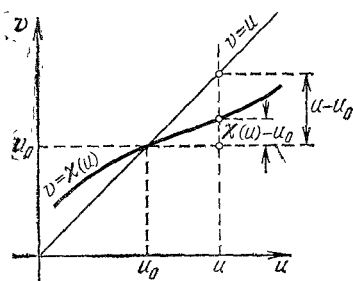


Рис. 35

и (79). Для того чтобы замкнутая траектория K была предельным циклом, необходимо и достаточно, чтобы точка (u_0, u_0) являлась изолированной точкой пересечения графиков (78) и (79). Если эти графики не касаются друг друга в точке (u_0, u_0) , т. е. если $\chi'(u_0) \neq 1$, то точка (u_0, u_0) их пересечения обязательно изолированная. В этом случае траектория K называется *грубым* предельным циклом. При $\chi'(u_0) < 1$ (рис. 36) предельный цикл K устойчив. При $\chi'(u_0) > 1$ (рис. 37) предельный цикл K вполне неустойчив.

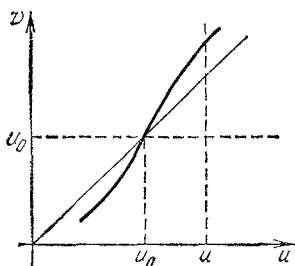


Рис. 36

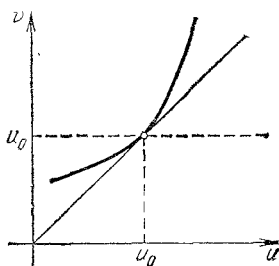


Рис. 37

Если графики (78) и (79) касаются друг друга в точке (u_0, u_0) и кривая (78) переходит с одной стороны биссектрисы (79) на другую, то предельный цикл K является либо устойчивым, либо вполне неустойчивым. Если же кривая (78), касаясь биссектрисы (79), находится по одну ее сторону (рис. 37), то соответствующий предельный цикл является полустойчивым.

§ 18. Критерий существования предельного цикла

А) Пусть $\varphi(t)$ — некоторое решение уравнения (72), определенное для всех значений $t \geq t_0$ и остающееся для этих значений t в замкнутом ограниченном множестве F , расположенном в Δ . Точка p плоскости P называется ω -предельной точкой решения $\varphi(t)$, если существует такая неограниченно возрастающая последовательность значений (больших t_0),

$$t_1, t_2, \dots, t_k, \dots; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty,$$

что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k) = p.$$

Совокупность Ω всех ω -предельных точек решения $\varphi(t)$ называется его ω -предельным множеством. Оказывается, что множество Ω непусто, замкнуто, ограничено и состоит из целых траекторий; последнее означает, что если точка ξ принадлежит Ω , то решение $\varphi(t, \xi)$ с начальными значениями $(0, \xi)$ определено для всех значений t и вся траектория $\varphi(t, \xi)$ входит в множество Ω . Очевидно, что ω -предельное множество траектории $\varphi(t, \xi)$ целиком содержится в Ω .

Докажем предложение А). Из замкнутости и ограниченности множества F следует, что множество Ω (очевидно, содержащееся в F) непусто и ограничено. Покажем, что оно замкнуто. Пусть

$$p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$$

— некоторая последовательность точек множества Ω , сходящаяся к некоторой точке p множества F ; докажем, что p принадлежит Ω . Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots$ и $s_1, s_2, \dots, s_k, \dots$ — две такие последовательности положительных чисел, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \infty.$$

Так как точка p_k принадлежит Ω , то найдется такое значение $t_k \geq s_k$, что расстояние между точками p_k и $\varphi(t_k)$ меньше ε_k . Для выбранных значений

$$t_1, t_2, \dots, t_k, \dots; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty,$$

мы получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k) = p,$$

а это значит, что точка p входит в Ω .

Покажем теперь, что множество Ω состоит из целых траекторий. Пусть ξ — произвольная точка множества Ω и $\varphi(t, \xi)$ — решение с начальными значениями $(0, \xi)$. Пусть, далее, τ — такое значение переменной t (оно может быть и отрицательно), для которого решение $\varphi(t, \xi)$ определено, так что точка $\varphi(\tau, \xi)$ существует. Так как точка ξ принадлежит Ω , то найдется такая неограниченно возрастающая по-

следовательность

$$t_1, t_2, \dots, t_k, \dots; \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty,$$

что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k) = \xi. \quad (80)$$

Так как решение $\varphi(t)$ определено для всех достаточно больших значений t , то при заданном τ определены (начиная с некоторого k) точки

$$\varphi(t_k + \tau) = \varphi(\tau, \varphi(t_k))$$

(см. § 16, С)). Из формулы (80) в силу теоремы 2 имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k + \tau) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\tau, \varphi(t_k)) = \varphi(\tau, \xi),$$

а из этого следует, что точка $\varphi(\tau, \xi)$ принадлежит множеству Ω . Таким образом, решение $\varphi(t, \xi)$ лежит в множестве Ω для всех тех значений t , для которых оно определено. Докажем, что $\varphi(t, \xi)$ определено для всех значений t . Если это не так, то найдется такое значение $\hat{t}$, что при всех $t < \hat{t}$ решение $\varphi(t, \xi)$ определено, а при $t = \hat{t}$ нет. Далее, существует предел $\lim_{t \rightarrow \hat{t}} \varphi(t, \xi) = p$, причем p принадлежит Ω . В силу теоремы 2 для всех t , достаточно близких к $\hat{t}$, определено решение $\varphi(t, p)$ системы (72) с начальными значениями $(\hat{t}, p)$. Продолжив траекторию $\varphi(t, \xi)$ и положив $\varphi(t, \xi) = \varphi(t, p)$ при $t > \hat{t}$, получим снова решение системы (72), продолжающее $\varphi(t, \xi)$ за точку $\hat{t}$. Таким образом, не может существовать конечного числа $\hat{t}$, на котором траектория $\varphi(t, \xi)$ заканчивается.

Итак, предложение А) доказано.

Укажем некоторые примеры ω -предельного множества. Если решение $\varphi(t)$ (см. А)) есть положение равновесия, т. е. $\varphi(t) \equiv x_0$, то ω -предельное множество решения $\varphi(t)$ состоит, очевидно, из одной точки x_0 . Если $\varphi(t)$ — периодическое решение, описывающее замкнутую траекторию K , то ω -предельное множество решения $\varphi(t)$, очевидно, совпадает с K . Наконец, если K — периодическое решение, а $\varphi(t)$ — спирально накручивающаяся на него при $t \rightarrow +\infty$ траектория, то K есть ω -предельное множество решения $\varphi(t)$.

Докажем теперь теорему, дающую возможность установить в некоторых случаях существование

периодического решения. В случае аналитических правых частей системы (71) это периодическое решение будет либо предельным циклом, либо будет содержаться внутри семейства периодических траекторий (см. пример 3).

Теорема 13. Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (72), определенное для всех значений $t \geq t_0$ и остающееся при этих значениях t в замкнутом ограниченном множестве F , содержащемся в Δ , и пусть Ω есть ω -предельное множество решения $\varphi(t)$. Если множество Ω не содержит положений равновесия, то оно состоит из одной замкнутой траектории K . При этом возможны два случая: 1) $\varphi(t)$ — периодическое решение, а K — описываемая им траектория; 2) траектория, описываемая решением $\varphi(t)$, при $t \rightarrow +\infty$ наматывается на траекторию K , как спираль.

Доказательство. Если $\varphi(t)$ — периодическое решение, то множество Ω состоит из единственной периодической траектории K , описываемой решением $\varphi(t)$, и утверждение теоремы очевидно (случай 1). Допустим, что решение $\varphi(t)$ не является периодическим, и пусть b — произвольная точка множества Ω . Через точку b проведем прямолинейный отрезок L , не коллинеарный вектору $f(b)$ фазовой скорости, выходя-

щему из точки b ($f(b) \neq 0$, так как по предположению точка b множества Ω не является положением равновесия), и выберем этот отрезок настолько коротким, чтобы все траектории, проходящие через точки этого отрезка, пересекали его (не касаясь) в том же направлении, что и траектория, проходящая через b (рис. 38). Так как точка b является ω -предельной для тра-

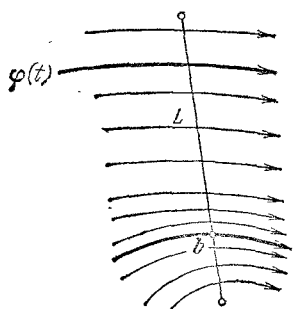


Рис. 38

ектории $\varphi(t)$, а последняя не является замкнутой, то эта траектория должна, очевидно, бесчисленное множество раз пересечь отрезок L , и притом в различных точках (см. А)). Пусть $a_1 = \varphi(t_1)$ и $a_2 = \varphi(t_2)$ — две следующие друг за другом во времени ($t_1 < t_2$) точки пересечения траектории $\varphi(t)$ с отрезком L . Кусок траектории $\varphi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, обозначим

через M . Вместе с отрезком a_1a_2 он образует замкнутую кривую Q , которая разбивает плоскость на две области G_1 и G_2 . Пусть h — малое положительное число. Геометрически очевидно (рис. 39), что точки $\varphi(t_1 - h)$ и $\varphi(t_2 + h)$ лежат по разные стороны кривой Q ; будем считать, что первая принадлежит области G_1 , вторая — области G_2 . Через отрезок a_1a_2 все траектории входят из области G_1 в область G_2 . Таким образом, ни одна траектория не может выйти из области G_2 через этот отрезок. Войти или выйти в область G_2 через кривую M никакая траектория также не может, так как M есть кусок траектории, а траектории не могут пересекаться между собой. Так как кусок M траектории $\varphi(t)$ пересекается с отрезком L только в своих концах, то концы отрезка L лежат по разные стороны кривой Q . Обозначим через a тот конец отрезка L , который лежит в области G_2 . Траектория $\varphi(t)$, начиная с $t > t_2 + h$, вся протекает в области G_2 и не может пересекать отрезок a_1a_2 ; поэтому точка b не принадлежит отрезку a_1a_2 (см. А)), и, следовательно, она должна лежать на отрезке aa_2 . Если теперь $a_3 = \varphi(t_3)$ — следующая (во времени) после a_2 точка пересечения траектории $\varphi(t)$ с отрезком L , то из аналогичных соображений видно, что она лежит на отрезке ba_2 (рис. 39). Обозначая через

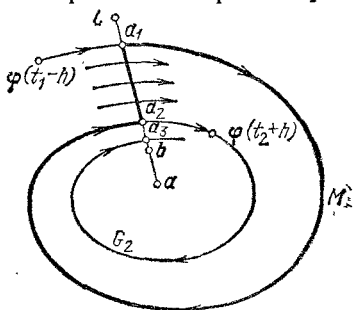


Рис. 39

$a_4 = \varphi(t_4), \dots, a_k = \varphi(t_k), \dots$

следующие друг за другом (во времени) точки пересечения траектории $\varphi(t)$ с отрезком L , мы убедимся, что они образуют на отрезке монотонную последовательность точек, идущих в направлении от a_1 к b . Покажем, что предел b' последовательности $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ совпадает с b .

Для этого мы прежде всего докажем, что последовательность $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ неограниченно возрастает. Допустим, что $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \tau < +\infty$. Тогда $\varphi(\tau) = b'$

и $f(b') = \dot{\varphi}(\tau) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_k)}{\tau - t_k}$, а это невозможно, так как вектор $\varphi(\tau) - \varphi(t_k)$ направлен вдоль отрезка L , а вектор $f(b')$ неколлинеарен этому отрезку. Таким образом, должно быть выполнено соотношение $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$ и потому вся траектория $\varphi(t)$ при $t \geq t_1$ пересекается с L лишь в точках $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$. Следовательно, эта траектория имеет на отрезке L лишь одну ω -предельную точку b' (см. А)), так что $b' = b$. Отметим, что в проведенном доказательстве было пока использовано лишь то, что сама точка b не является положением равновесия.

Покажем теперь, что траектория $\varphi(t)$ не может входить в ω -предельное множество для какой-либо другой траектории $\psi(t)$. Допустим противоположное. Тогда каждая точка траектории $\varphi(t)$ является ω -предельной для $\psi(t)$ (см. А)); в частности, таковой будет точка a_1 . Так как точка a_1 не является положением равновесия, то в силу доказанного выше последовательные точки

$$b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$$

пересечения траектории $\psi(t)$ с отрезком L образуют монотонную последовательность, сходящуюся к a_1 , и других ω -предельных точек траектории $\psi(t)$ на отрезке L не существует. Но это противоречит тому, что все точки $a_2, a_3, \dots$, лежащие на траектории $\varphi(t)$, являются ω -предельными точками траектории $\psi(t)$.

Итак, доказано, что незамкнутая траектория, среди ω -предельных точек которой нет положений равновесия, не может быть сама ω -предельной.

Так как траектория K содержится в ω -предельном множестве Ω траектории $\varphi(t)$, а это множество замкнуто (см. А)), то все ω -предельные точки траектории K содержатся в Ω и потому не являются положениями равновесия. Таким образом, к траектории K можно применить доказанное выше предложение, так что траектория K должна быть замкнутой. Из всего построения видно, что траектория $\varphi(t)$ наматывается на K , как спираль, и потому множество Ω состоит лишь из замкнутой траектории K , проходящей через точку b .

Примеры

1. Дадим пример системы уравнений вида (71), имеющей периодические решения различного типа, в частности предельные циклы различных видов. Первоначально мы зададим ее в полярных координатах φ, ρ , а затем уже преобразуем в декартовы координаты x, y . Имея в виду последующее преобразование к декартовым координатам, мы зададим ее в виде

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{\rho} = g(\rho^2), \quad (81)$$

где $g(u)$ — непрерывно дифференцируемая функция своего аргумента, определенная для всех неотрицательных его значений. При рассмотрении в полярных координатах будем использовать лишь положительные значения для ρ .

Множество всех положительных значений ρ , для которых $g(\rho^2) = 0$, обозначим через N , а его дополнение в множестве положительных чисел — через D . Каждому числу u_0 из N соответствует, очевидно, решение

$$\varphi = t, \quad \rho = u_0$$

уравнения (81); соответствующая траектория K_{u_0} замкнута: она является окружностью в плоскости P с центром в начале координат и радиусом u_0 . Так как множество N замкнуто в совокупности всех положительных чисел, то D открыто и состоит из конечного или счетного числа интервалов, попарно друг друга не пересекающих. Пусть $u_1 < \rho < u_2$ — один из конечных интервалов. Тогда замкнутые траектории K_{u_1} и K_{u_2} ограничивают в плоскости P кольцо Q . Для всех чисел ρ интервала $u_1 < \rho < u_2$ функция $g(\rho^2)$ сохраняет знак, так что на всем интервале имеет место одно из неравенств

$$g(\rho^2) < 0; \quad g(\rho^2) > 0. \quad (82)$$

Пусть

$$\varphi = t, \quad \rho = \rho(t, u) \quad (83)$$

— решение системы (81) с начальными значениями $t = 0, \varphi = 0, \rho = u$, где $u_1 < u < u_2$. Функция $\rho(t, u)$ определена для всех значений t и при $t \rightarrow +\infty$ приближается к одному из концов интервала $u_1 < \rho < u_2$, а при $t \rightarrow -\infty$ — к другому. Из этого следует, что

траектория (83) при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$ наматывается, как спираль, на окружности K_{u_1} , K_{u_2} . Именно: если выполнено первое из неравенств (82), то траектория (83) представляет собой спираль, наматывающуюся на K_{u_1} при $t \rightarrow +\infty$ и на K_{u_2} при $t \rightarrow -\infty$ (рис. 40). Если выполнено второе из неравенств (82), то решение (83) представляет собой спираль, наматывающуюся на K_{u_1} при $t \rightarrow -\infty$ и на K_{u_2} при $t \rightarrow +\infty$ (рис. 41). Таким образом, кольцо Q заполнено однотипными спиралями одного из двух видов

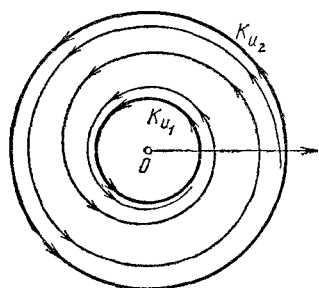


Рис. 40

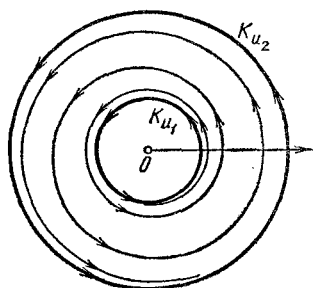


Рис. 41

в зависимости от того, какое из неравенств (82) выполняется на интервале $u_1 < \rho < u_2$. Если множество N ограничено и u^* — его верхняя грань, то на бесконечном интервале $u^* < \rho < +\infty$ траектории (83) в одну сторону наматываются на окружность K_{u^*} , а в другую сторону уходят в бесконечность.

Если точка u_0 множества N является его изолированной точкой, то замкнутая траектория K_{u_0} является предельным циклом, вид которого зависит от типа спиралей, заполняющих кольца, примыкающие к траектории K_{u_0} . Если точка u_0 множества N не является его изолированной точкой, то периодическое решение K_{u_0} не является предельным циклом. Если при этом в N содержится целый интервал с центром в u_0 , то периодическое решение K_{u_0} содержится внутри целого семейства периодических решений, составляющих совокупность концентрических окружностей с общим центром в начале координат. Если к числу u_0 с одной стороны примыкает целый отрезок чисел множества N , а с другой — интервал из D , то траектория K_{u_0} является крайней в семействе замкнутых траекторий, примыкающих к ней с одной стороны, а с другой сто-

роны на нее наматывается семейство спиральных траекторий. Возможны, однако, и более сложные случаи примыкания замкнутых траекторий к периодическому решению K_{u_0} . Их легко себе представить; например, N может быть канторовым совершенным множеством.

Запишем теперь систему (81) в декартовых координатах, положив

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (84)$$

Дифференцируя соотношения (84), получаем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi = \rho g(\rho^2) \cdot \frac{x}{\rho} - \rho \cdot \frac{y}{\rho} = \\ &= xg(x^2 + y^2) - y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi = \rho g(\rho^2) \cdot \frac{y}{\rho} + \rho \cdot \frac{x}{\rho} = \\ &= y \cdot g(x^2 + y^2) + x. \end{aligned}$$

Итак, в декартовых координатах система (81) записывается в виде

$$\dot{x} = xg(x^2 + y^2) - y, \quad \dot{y} = yg(x^2 + y^2) + x. \quad (85)$$

(Здесь g может быть, например, произвольным многочленом.) Система (85) имеет в начале координат положение равновесия.

2. Пусть

$$\dot{x}^1 = f^1(x^1, x^2, \mu), \quad \dot{x}^2 = f^2(x^1, x^2, \mu)$$

— нормальная автономная система второго порядка, правые части которой зависят от числового параметра μ и обладают непрерывными частными производными первого порядка по всем своим аргументам x^1, x^2, μ . Пусть, далее,

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (86)$$

— векторная запись этой системы. Решение уравнения (86) с начальными значениями $0, \xi$ обозначим через $\varphi(t, \xi, \mu)$; предположим, что $\varphi(t, \xi_0, \mu_0)$ есть периодическое решение уравнения (86) при $\mu = \mu_0$ периода T . Выясним вопрос о том, что происходит с этим решением при изменении параметра μ вблизи значения μ_0 .

Решения уравнения (86) будем изображать в одной и той же плоскости P независимо от значения параметра μ . Пусть K — замкнутая траектория, соот-

ветствующая решению $\varphi(t, \xi_0, \mu_0)$, и L — гладкая кривая, заданная в плоскости P параметрическим векторным уравнением

$$x = \psi(u),$$

которая пересекается с траекторией K в единственной точке

$$\xi_0 = \varphi(0, \xi_0, \mu_0) = \varphi(T, \xi_0, \mu_0) = \psi(u_0), \quad (87)$$

не касаясь ее. Рассмотрим векторное уравнение

$$\varphi(t, \psi(u), \mu) - \psi(v) = 0, \quad (88)$$

в котором независимыми переменными будем считать μ , u , а неизвестными функциями t и v . Независимые переменные пусть меняются: u вблизи u_0 и μ вблизи μ_0 . Решения будем искать при t , близком к T , и v , близком к u_0 . При $u = u_0$, $\mu = \mu_0$ имеется очевидное решение уравнения (88): $t = T$, $v = u_0$ (см. (87)), и функциональный определитель соответствующей системы уравнений при этих значениях переменных отличен от нуля, так как векторы $f(\xi_0, \mu_0)$ и $\psi'(u_0)$ независимы. При $\mu = \mu_0$ уравнение (88) определяет функцию последования $v = \chi(u, \mu_0)$ уравнения (86) ($\mu = \mu_0$) вблизи замкнутой траектории K . При μ , близком к μ_0 , функция $v = \chi(u, \mu)$ также определяется из уравнения (88) и может считаться функцией последования уравнения (86) вблизи периодического решения K . Однако уравнение (86) при $\mu \neq \mu_0$ может и не иметь периодического решения. Для отыскания периодического решения уравнения (86) при μ , близком к μ_0 , рассмотрим уравнение

$$\chi(u, \mu) - u = 0 \quad (89)$$

относительно неизвестной функции $u(\mu)$ переменной μ . Если производная левой части уравнения (89) по переменной u при $u = u_0$, $\mu = \mu_0$ отлична от нуля, т. е. если

$$\frac{\partial}{\partial u} \chi(u_0, \mu_0) \neq 1, \quad (90)$$

то уравнение (89) заведомо имеет дифференцируемое решение $u(\mu)$, и тогда уравнение (86) имеет при μ , близком к μ_0 , единственное периодическое решение, гладко зависящее от μ и превращающееся в K при $\mu = \mu_0$. Условие (90) означает предположение гру-

бости цикла K . В полученном результате заключается оправдание термина «грубый». Грубый предельный цикл не исчезает (и остается грубым) при малых изменениях правых частей системы, он «прочен» при этих изменениях.

Если график уравнения

$$v = \chi(u, \mu) \quad (91)$$

в плоскости переменных u, v при $\mu = \mu_0$ касается в точке (u_0, u_0) биссектрисы

$$v = u \quad (91')$$

с порядком касания единица (рис. 42, б), то кривая (91) при $\mu = \mu_0$ лежит по одну сторону биссектрисы

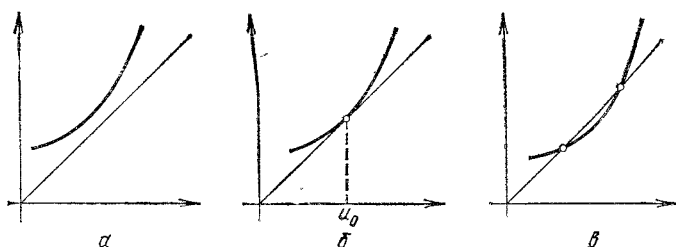


Рис. 42

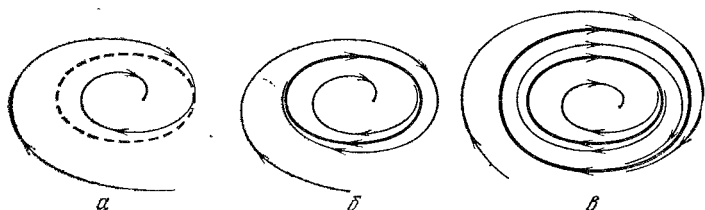


Рис. 43

(91') и предельный цикл K является полуустойчивым (рис. 43, б). При изменениях параметра μ вблизи μ_0 наиболее естественное поведение графика (91) заключается в том, что при значениях μ , лежащих по одну сторону от μ_0 , точка пересечения графиков (91) и (91') вовсе исчезает (рис. 42, а), а при значениях μ , лежащих по другую сторону, появляются две точки пересечения этих графиков (рис. 42, в), так что у уравнения (86) появляются два грубых предельных цикла, близких к K (рис. 43, в). Таким образом, при прохождении параметра μ через значение μ_0 мы сна-

чала не имеем предельного цикла (рис. 42, а), далее при $\mu = \mu_0$ появляется один полуустойчивый цикл, и при дальнейшем изменении параметра μ он распадается на два грубых предельных цикла, близких к K . Описанное явление принято называть «рождением» предельных циклов уравнения (86) при изменении его правой части.

3. Отметим некоторые очень важные свойства периодического решения K уравнения (86) в случае аналитических правых частей. Здесь мы без доказательства используем тот факт, что решение $\varphi(t, \xi)$ уравнения (86) является в этом случае аналитической функцией переменных t и ξ^1, ξ^2 . При построении функции последования будем считать, что кривая L задается аналитическим уравнением. В этих предположениях функция последования $\chi(u)$ оказывается аналитической, будучи решением аналитического уравнения.

Так как нулям функции $\chi(u)$ — u соответствуют периодические решения уравнения (86), то ввиду аналитичности функции $\chi(u)$ возможны лишь два взаимно исключающих друг друга случая: 1) K есть предельный цикл — случай, когда u_0 есть изолированный нуль функции $\chi(u)$ — u ; 2) периодическое решение K содержится внутри семейства периодических решений — случай, когда функция $\chi(u)$ — u тождественно равна нулю. Если на траекторию K спирально наворачивается какая-либо другая траектория, то K не содержится внутри семейства периодических решений и, следовательно, является предельным циклом. Таким образом, при аналитических правых частях в случае 2) теоремы 13 периодическое решение K является предельным циклом.

§ 19. Ламповый генератор

Здесь схематически будет описано устройство простейшего лампового генератора — прибора, являющегося источником периодических (незатухающих) электрических колебаний. Будет дана качественная математическая теория работы генератора. Уравнение, описывающее работу лампового генератора, нелинейно. Его предельный цикл и соответствует периодическим колебаниям, возбуждаемым генератором. Адекватность математического понятия предельного

цикла и физического понятия незатухающего колебания, возбуждаемого ламповым генератором, была впервые установлена выдающимся советским ученым А. А. Андроновым. До исследований Андропова работу лампового генератора пытались объяснить при помощи линейных дифференциальных уравнений, что не могло дать правильной математической картины работы генератора.

А) Триод (один из видов электронной лампы) представляет собой трехполюсник aks . Условное изображение триода показано на рис. 44. Здесь a — анод, k — катод, s — сетка. Между полюсами s и k подается разность напряжений U_s (сеточное напряжение), однако ток между полюсами s и k отсутствует; от полюса a к полюсу k через лампу течет ток I_a (анодный ток). Закон, управляющий работой триода, записывается формулой

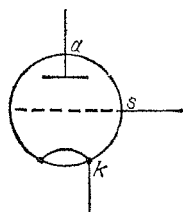


Рис. 44

$$I_a = f(U_s). \quad (92)$$

Функция f называется *характеристикой* триода. Мы будем считать, что она является монотонно возрастающей и положительной и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \lim_{U_s \rightarrow -\infty} f(U_s) &= 0, \\ \lim_{U_s \rightarrow +\infty} f(U_s) &= I_N, \end{aligned}$$

где I_N — ток насыщения триода (рис. 45). Обычно предполагают также, что максимум функции $f'(U_s)$ достигается в точке $U_s = 0$.

Описанный в А) под названием триода трехполюсник в действительности включает в себя, кроме электронной лампы, еще анодную батарею, батарею сеточного смещения и батарею накаливания катода.

В) Ламповый генератор с колебательным контуром в анодной цепи имеет следующее устройство (рис. 46). Он имеет четыре узла a, k, s, b и состоит из триода aks (см. А)) с характеристикой $f(U_s)$, конденсатора ak с емкостью C , сопротивления ab величины R , индуктивности bk величины L и еще одной индуктивности sk , величина которой не имеет значения. Индуктивности kb и ks связаны отрицательной взаи-

моиндукцией $-M$ ($M > 0$), которая осуществляет так называемую обратную связь в ламповом генераторе. Если обозначить через J силу тока, идущего через сопротивление ba или, что то же самое, через индуктивность kb :

$$J = I_{ba} = I_{kb},$$

то оказывается, что величина J как функция времени

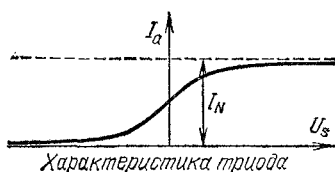


Рис. 45

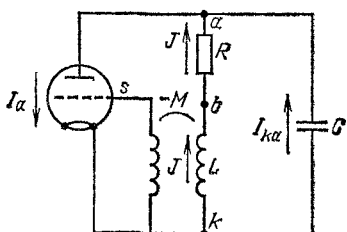


Рис. 46

t удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$L\ddot{J} + R\dot{J} + \frac{J}{C} = \frac{1}{C} f(MJ). \quad (93)$$

Выведем уравнение (93). В силу первого закона Кирхгофа мы имеем

$$J + I_{ka} = I_a, \quad (94)$$

где I_{ka} — ток, идущий через конденсатор ka . Кроме того, в силу наших предположений о свойствах триода имеем

$$I_{sk} = 0. \quad (95)$$

Применяя второй закон Кирхгофа к колебательному контуру kba , получаем (см. (95))

$$L\dot{I}_{kb} + RI_{ba} + \frac{1}{C} \int I_{ak} dt = 0.$$

Дифференцируем это соотношение:

$$L\ddot{I}_{kb} + R\dot{I}_{ba} + \frac{1}{C} I_{ak} = 0. \quad (96)$$

В силу взаимной индукции между индуктивностями kb и ks получаем (см. (95), а также § 14, В))

$$U_s = M\dot{I}_{kb}. \quad (97)$$

Таким образом, из соотношений (92), (94), (96), (97) следует (93).

С) Уравнение (93) в фазовой плоскости переменных $J, \dot{J}$ имеет единственное положение равновесия с координатами

$$J = f(0), \quad \dot{J} = 0. \quad (98)$$

Это положение равновесия асимптотически устойчиво, если

$$R > \frac{M}{C} f'(0), \quad (99)$$

и вполне неустойчиво, если

$$R < \frac{M}{C} f'(0). \quad (100)$$

Бесконечно удаленная точка плоскости переменных $J, \dot{J}$ во всех случаях вполне неустойчива. Это значит, что существует настолько большой круг K в плоскости $J, \dot{J}$, что всякая траектория уравнения (93) начиная с некоторого момента времени приходит в этот круг и остается в нем. При выполнении неравенства (100) положение равновесия (98) также неустойчиво. Таким образом, в силу теоремы 12 (см. § 17) ω -предельное множество любой траектории, отличной от положения равновесия (98), представляет собой замкнутую траекторию. Итак, в случае выполнения неравенства (100) ламповый генератор является источником периодических незатухающих электрических колебаний.

З а м е ч а н и е. При надлежащем выборе характеристики f уравнение (93) имеет *единственный* предельный цикл, а все остальные траектории уравнения (93), отличные от положения равновесия (98), намотываются на него. Одна из характеристик, обладающих этим свойством, будет указана в примере.

Для доказательства предложения С) введем вместо неизвестной функции J новую неизвестную функцию x , положив

$$J = x + f(0), \quad (101)$$

с тем чтобы точке (98) соответствовало начало координат плоскости $x, \dot{x}$.

Сделав подстановку (101), получаем из уравнения (93) уравнение

$$\ddot{x} + \frac{R}{L} \dot{x} + \frac{1}{LC} x = \frac{1}{LC} [f(M\dot{x}) - f(0)]. \quad (102)$$

Функцию переменного $\dot{x}$, стоящую в правой части этого уравнения, обозначим через $g(\dot{x})$. Непосредственно видно, что функция g является ограниченной, монотонно возрастающей и обращается в нуль

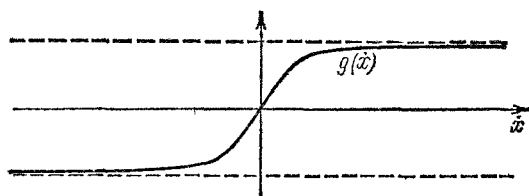


Рис. 47

лишь при нулевом значении аргумента (рис. 47). Полагая сверх того

$$\frac{R}{L} = 2\delta, \quad \frac{1}{LC} = \omega^2,$$

запишем уравнение (102) в виде

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = g(\dot{x}).$$

Вводя новое переменное $y = \dot{x}$, получаем из этого уравнения нормальную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega^2 x - 2\delta y + g(y). \end{aligned} \quad (103)$$

Для отыскания положений равновесия системы (103) приравняем ее правые части нулю:

$$\begin{aligned} y &= 0, \\ -\omega^2 x - 2\delta y + g(y) &= 0. \end{aligned}$$

Полученная система имеет единственное решение

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Таким образом, начало координат является единственным положением равновесия системы (103), а из этого следует, что единственным положением равновесия уравнения (93) является точка (98).

Выясним теперь условия устойчивости положения равновесия $(0, 0)$ системы (103), для чего линеаризуем эту систему в точке $(0, 0)$. Мы получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x - 2\delta y + g'(0)y. \end{cases} \quad (104)$$

Легкие вычисления дают характеристический многочлен

$$\lambda^2 + (2\delta - g'(0))\lambda + \omega^2$$

линейной системы (104). В новых обозначениях условия (99) и (100) соответственно принимают вид $2\delta > g'(0)$, $2\delta < g'(0)$. Таким образом, при выполнении условия (99) положение равновесия $(0, 0)$ асимптотически устойчиво (см. теорему 11), а при выполнении условия (100) оно вполне неустойчиво, т. е. существует достаточно малый эллипс K' такой, что все траектории, начинающиеся внутри него и отличные от положения равновесия, выходят из него.

Для выяснения поведения траекторий системы (103) в далеких частях фазовой плоскости x, y рассмотрим линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x - 2\delta y, \end{cases} \quad (105)$$

полученную из системы (103) отбрасыванием ограниченного во всей плоскости члена $g(y)$. Легкие вычисления дают характеристический многочлен системы (105):

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2; \quad (106)$$

так как числа 2δ и ω^2 положительны, то его корни имеют отрицательные действительные части. Таким образом, в силу предложения Е) § 16 для линейной системы (105) существует функция Ляпунова $W(x, y)$, удовлетворяющая условию

$$\dot{W}_{(105)}(x, y) \leq -\beta W(x, y). \quad (107)$$

Вычислим теперь производную $\dot{W}_{(103)}(x, y)$ функции $W(x, y)$ в силу системы (103). Мы имеем

$$\dot{W}_{(103)}(x, y) = \dot{W}_{(105)}(x, y) + \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} g(y). \quad (108)$$

Так как функция $g(y)$ ограничена, то имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} \cdot g(y) \right| \leq \gamma \sqrt{W(x, y)} \quad (109)$$

(см. формулу (47) § 16), где γ — некоторая положительная константа.

Полагая теперь

$$c = \frac{2\gamma}{\beta}, \quad \alpha = \frac{\beta}{4},$$

из (107) — (109) получаем неравенство

$$\dot{W}_{(12)}(x, y) \leq -2\alpha W(x, y) \quad \text{при} \quad W(x, y) \geq c^2. \quad (110)$$

Уравнение

$$W(x, y) = c^2 \quad (111)$$

определяет в плоскости x, y эллипс. Из неравенства (110) непосредственно следует, что в точке (x, y) , принадлежащей эллипсу (111), функция $W(x, y)$ убывает вдоль траектории системы (103), проходящей через точку (x, y) . Таким образом, все траектории системы (103), пересекая эллипс (111), входят внутрь этого эллипса. Если

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (112)$$

— решение системы (103), начинающееся в точке (ξ, η) вне эллипса (111), то, полагая

$$w(t) = W(\varphi(t), \psi(t)),$$

для функции $w(t)$ получаем неравенство

$$\dot{w}(t) \leq -2\alpha w(t), \quad (113)$$

верное при условии

$$w(t) \geq c^2.$$

Интегрируя неравенство (113), получаем

$$W(\varphi(t), \psi(t)) \leq W(\xi, \eta) e^{-2\alpha t}.$$

Из этого следует, что траектория (112) обязательно входит в эллипс (111). При этом ни одна траектория не может выйти из этого эллипса, так как в его граничных точках все траектории входят внутрь.

Пусть теперь K — некоторая окружность в плоскости x, y , содержащая эллипс (111). Из доказанного следует, что всякая траектория системы (103),

отличная от положения равновесия $(0, 0)$, обязательно входит в окрестность K и остается в ней. Так как точка $(0, 0)$ вполне неустойчива, то траектория эта не может иметь ее в числе своих ω -предельных точек и потому в силу теоремы 13 (см. § 18) она есть либо спираль, наматывающаяся на периодическое решение, либо периодическое решение.

Итак, предложение С) доказано.

Пример

А. А. Андронов, который впервые составил для лампового генератора нелинейное уравнение (93), рассмотрел случай, когда характеристика f триода имеет особо простой вид, а именно: она равна нулю при отрицательных значениях аргумента и равна положительной константе b при положительных значениях аргумента. Считая, что $f(0) = \frac{b}{2}$ и производя замену переменных (101), мы приходим к системе (102), в которой функция $g(y)$ определяется условием

$$g(y) = \begin{cases} -\omega^2 a & \text{при } y < 0, \\ \omega^2 a & \text{при } y > 0, \end{cases} \quad (114)$$

где $a = \frac{b}{2}$. Система (103) с выбранной таким образом разрывной функцией $g(y)$ записывается при $y > 0$, т. е. в верхней полуплоскости, в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega^2 y - 2\delta y + \omega^2 a, \end{aligned} \quad (115)$$

а при $y < 0$, т. е. в нижней полуплоскости, в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega^2 x - 2\delta y - \omega^2 a. \end{aligned} \quad (116)$$

Мы будем считать, что корни многочлена (106) комплексные. Таким образом, положение равновесия $(0, 0)$ системы (105) представляет собой устойчивый фокус (см. § 15); системы же (115) и (116) отличаются от системы (105) только сдвигом: их положения равновесия помещены не в начале координат, как у системы (105), а в точке $(a, 0)$ у системы (115) и в точке $(-a, 0)$ у системы (116). Заметим, что спирали линейной системы (105) наматываются на положение

ние равновесия $(0, 0)$ по часовой стрелке и что при прохождении полувитка спирали фазовая точка приближается к началу координат, так что ее первоначальное расстояние от начала координат умножается на некоторое число $\lambda < 1$, не зависящее от начального положения точки (см. § 15).

Для того чтобы представить себе фазовую плоскость системы (103) в случае, когда функция $g(y)$ определяется условиями (114), нужно верхнюю полуплоскость заполнить полувитками спиральных траекторий системы (115), а нижнюю — полувитками спиральных траекторий системы (116); при переходе же через прямую $y = 0$ следует непрерывно переходить с одних траекторий на другие. Исходя из этого описания фазовой картины системы (103) (см. 114)), будем искать ее замкнутые траектории.

Рассмотрим траекторию системы (103) (см. (114)), начинающуюся на оси абсцисс в точке с координатой $\xi > 0$. Так как движение в фазовой плоскости системы (103) происходит по часовой стрелке, то из выбранной точки траектория пойдет в нижнюю полуплоскость и, следовательно, будет управляться системой (116). После прохождения полувитка спирали в нижней полуплоскости фазовая точка вновь попадет на ось абсцисс в точку с координатой

$$-(a + \lambda(a + \xi)). \quad (117)$$

Это следует из того, что при прохождении полувитка спирали расстояние от фазовой точки до положения равновесия $(-a, 0)$ умножается на λ . Точка с координатой (117), лежащая на оси абсцисс, будет затем двигаться в силу системы (115) и после прохождения полувитка спирали в верхней полуплоскости придет на ось абсцисс в точку с координатой

$$a + \lambda(2a + \lambda(a + \xi)). \quad (118)$$

Таким образом, траектория, начинающаяся в точке с координатой $\xi > 0$ на положительной оси абсцисс, после полного обхода вновь попадает на положительную часть оси абсцисс, но уже в точку с координатой (118), и мы получаем отображение χ положительной полуоси абсцисс в себя, определяемое соотношением

$$\chi(\xi) = a + 2\lambda a + \lambda^2 a + \lambda^2 \xi.$$

Функция $\chi(\xi)$ есть функция последования для системы (103) (см. (114)). Имеется лишь одно значение ξ , удовлетворяющее условию

$$\chi(\xi) = \xi,$$

и этому значению ξ соответствует предельный цикл системы (103), и притом грубый и устойчивый, так как $\chi'(\xi) = \lambda^2 < 1$ (см. § 17).

§ 20. Центробежный регулятор (исследования Вышнеградского)

В современной технике благодаря изобилию приборов автоматического управления чрезвычайно большую роль играет теория автоматического регулирования. Одним из важнейших вопросов, возникающих перед конструктором автоматического регулятора, является вопрос об устойчивости работы системы машина — регулятор. Этот вопрос во многих случаях может быть решен на основании теоремы Ляпунова (см. § 16).

Наиболее давно существующей системой автоматического регулирования является система паровой машины — центробежный регулятор Уатта. Центробежный регулятор, вполне хорошо справлявшийся со своей задачей в конце XVIII и в первой половине XIX века, в середине XIX века ввиду его конструктивных изменений стал работать ненадежно. Широкие круги теоретиков и инженеров искали выхода из возникшего кризиса. Вопрос с полной ясностью и простотой был решен выдающимся русским инженером Вышнеградским, основателем теории автоматического регулирования. Работой Вышнеградского «О регуляторах прямого действия» (1876 г.) начинается теория регулирования машин, отвечающая на вопросы промышленной практики. В настоящем параграфе в упрощенном виде излагается исследование Вышнеградского.

Центробежный регулятор (рис. 48) представляет собой вертикальный стержень S , могущий вращаться вокруг своей вертикальной оси, в верхнем конце которого на шарнирах прикреплены два одинаковых стержня L_1 и L_2 с одинаковыми грузами на концах. Стержни L_1 и L_2 скреплены дополнительными шарнирами, так что отклоняться от своего вертикального

положения они могут лишь одновременно на один и тот же угол φ , находясь в одной и той же вертикальной плоскости, неподвижно связанной со стержнем S . Когда стержни L_1 и L_2 отклоняются от своего вертикального положения на угол φ , они при помощи шарниров приводят в движение специальную муфту M ,

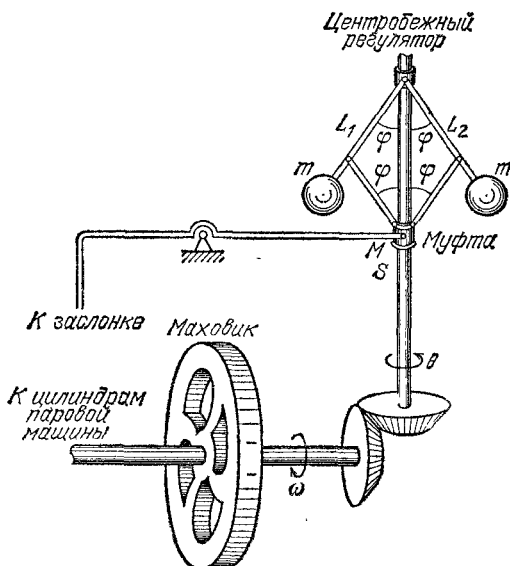


Рис. 48

надетую на стержень S , так что расстояние этой муфты до верхнего конца стержня S пропорционально $\cos \varphi$. Длину вертикальных стержней L_1 и L_2 примем за единицу, а массу каждого из грузов, прикрепленных на их концах, обозначим через m . Если стержень S вращается с угловой скоростью θ , а стержни L_1 и L_2 отклонены от вертикального положения на угол φ , то на каждый из грузов действует центробежная сила

$$m\theta^2 \sin \varphi. \quad (119)$$

Одновременно на каждый груз действует сила тяжести, равная

$$mg. \quad (120)$$

Так как в направлении стержня L_i силы, действующие на груз, уравниваются реакцией стержня L_i ,

то для расчета силы, действующей на груз, следует разложить обе упомянутые силы по осям, первая из которых направлена вдоль стержня, а вторая — в перпендикулярном направлении, в сторону возрастания угла φ . Непосредственно видно (рис. 49), что составляющая сила (119) в направлении возрастания угла φ равна

$$m\theta^2 \sin \varphi \cos \varphi, \quad (121)$$

а составляющая силы тяжести (120) в том же направлении равна

$$-mg \sin \varphi. \quad (122)$$

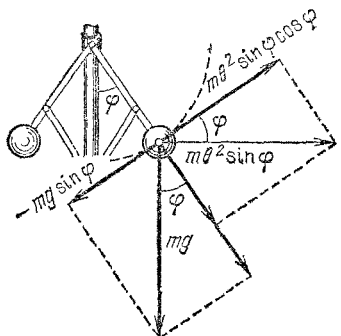


Рис. 49

Таким образом, равнодействующая обеих сил (121) и (122) задается формулой

$$m\theta^2 \sin \varphi \cos \varphi - mg \sin \varphi. \quad (123)$$

Упрощенное объяснение работы центробежного регулятора заключается в том, что при заданной угловой скорости θ стержни L_1 и L_2 отклоняются под действием сил (119), (120) на угол φ , определяемый из равенства

$$m\theta^2 \sin \varphi \cos \varphi - mg \sin \varphi = 0, \quad (124)$$

т. е. путем приравнивания нулю силы (123). Из соотношения (124) угол φ определяется как однозначная монотонно возрастающая функция скорости θ ; в этом смысле регулятор Уатта может рассматриваться как *измеритель* скорости вращения. Это есть так называемое *статическое* рассмотрение регулятора. В действительности мы имеем здесь *динамическое* явление. Масса m , находясь под воздействием силы (123), совершает движение, описываемое дифференциальным уравнением. Кроме силы (123) на массу m действует при ее движении сила трения в сочленениях шарниров. Сила эта весьма сложным образом зависит от происходящего движения. Существенно упрощая имеющуюся здесь сложность, мы будем считать, что сила трения пропорциональна скорости $\dot{\varphi}$ движения

массы m и имеет знак, противоположный этой скорости, т. е. имеет величину

$$-b\dot{\varphi},$$

где b — постоянная. Таким образом, если принять φ за координату, определяющую положение массы m , то мы получим для φ дифференциальное уравнение

$$m\ddot{\varphi} = m\theta^2 \sin \varphi \cos \varphi - mg \sin \varphi - b\dot{\varphi}. \quad (125)$$

(Расчет силы (123) проведен здесь в предположении, что θ и φ постоянны. При меняющихся θ и φ возникают добавочные силы, которые, однако, уравниваются реакциями стержней и шарниров, заставляющих стержни двигаться в одной плоскости. Таким образом, уравнение (125) оказывается справедливым.)

Паровая машина представляет собой маховое колесо с моментом инерции J , приводимое во вращательное движение силой пара и способное совершать полезную работу, например поднимать клеть из шахты. Дифференциальное уравнение паровой машины может быть, таким образом, записано в виде

$$J\dot{\omega} = P_1 - P, \quad (126)$$

где ω — угловая скорость вращения маховика, P_1 — момент силы действия пара, P — момент силы воздействия на маховик тяжести клетки. Момент силы воздействия пара P_1 зависит от того, насколько открыта заслонка, подающая пар в цилиндры паровой машины, а момент P зависит от загрузки клетки.

Центробежный регулятор присоединяется к паровой машине с целью поддерживать равномерность ее хода. Он «измеряет» скорость вращения махового колеса и, если она оказывается слишком большой, уменьшает подачу пара, а если она оказывается слишком малой, — увеличивает подачу пара. Для осуществления этой цели маховое колесо паровой машины связывается при помощи зубчатой передачи с вертикальным стержнем регулятора (см. рис. 48), так что между угловыми скоростями ω и θ возникает постоянная связь

$$\theta = n\omega, \quad (127)$$

где n — так называемое *передаточное число*. Такого *воздействия машины на регулятор*, в результате которого осуществляется измерение скорости вращения

маховика. С другой стороны, муфта M регулятора связана с заслонкой, подающей пар, так, что

$$P_1 = F_1 + k (\cos \varphi - \cos \varphi^*), \quad (128)$$

где φ^* — некоторое «среднее» значение φ , вблизи которого должно поддерживаться значение регулируемой величины φ , F_1 — значение силы воздействия пара P_1 при $\varphi = \varphi^*$, а $k > 0$ — постоянный коэффициент пропорциональности.

Как видно из (128), обратное действие регулятора на паровую машину осуществляется таким образом, что при увеличении угла φ подача пара (а вместе с ней и сила воздействия пара P_1) уменьшается. В результате описанных взаимодействий машины и регулятора последний, казалось бы, полностью осуществляет поставленную перед ним задачу, увеличивая подачу пара при уменьшении скорости вращения маховика и уменьшая подачу пара при увеличении скорости. В связи с этим естественно ожидать, что скорость вращения маховика будет стабилизироваться. Это и наблюдалось в паровых машинах, строившихся до середины XIX столетия. Для того чтобы выяснить причины начавшего наблюдаться после середины XIX столетия нарушения работы регулятора, необходимо было точно изучить динамику работы системы машина — регулятор и исследовать ее устойчивость, что и было сделано Вышнеградским.

Как видно из соотношений (125) — (128), система машина — регулятор описывается двумя дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} m\ddot{\varphi} &= mn^2\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - mg \sin \varphi - b\dot{\varphi}, \\ J\dot{\omega} &= k \cos \varphi - F, \end{aligned} \quad (129)$$

где $F = P - F_1 + k \cos \varphi^*$ — величина, зависящая от нагрузки. Первое из этих уравнений имеет второй порядок. Для приведения системы к нормальному виду введем новое переменное ψ , положив

$$\psi = \varphi.$$

Тогда система (129) запишется в нормальной форме:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \dot{\varphi}, \\ \ddot{\psi} &= n^2\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - g \sin \varphi - \frac{b}{m} \dot{\psi}, \\ \dot{\omega} &= \frac{k}{J} \cos \varphi - \frac{F}{J}. \end{aligned} \quad (130)$$

Правильная работа паровой машины заключается в том, что угловая скорость ω вращения ее маховика остается постоянной при неизменной нагрузке P , т. е. при постоянном F , а заслонка, подающая пар, неподвижна. Последнее означает, что угол φ остается неизменным. Таким образом, речь идет об отыскании такого решения системы (130), которое имеет вид

$$\varphi = \varphi_0, \quad \psi = 0, \quad \omega = \omega_0,$$

т. е. об отыскании положения равновесия этой системы. Задача заключается в том, чтобы, найдя положение равновесия системы (130), исследовать его устойчивость.

Приравняв нулю правые части соотношений (130) и решая получающиеся уравнения, найдем координаты положения равновесия:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 0, \\ \cos \varphi_0 &= \frac{F}{k}, \\ n^2 \omega_0^2 &= \frac{g}{\cos \varphi_0}. \end{aligned} \tag{131}$$

Положим

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi, \quad \psi = \psi_0 + \Delta\psi, \quad \omega = \omega_0 + \Delta\omega.$$

В результате такой замены и линеаризации уравнений (130) мы получаем систему

$$\Delta\dot{\varphi} = \Delta\dot{\psi},$$

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\psi} &= n^2 \omega_0^2 \cos 2\varphi_0 \Delta\varphi + n^2 \omega_0 \sin 2\varphi_0 \Delta\omega - \\ &\quad - g \cos \varphi_0 \Delta\varphi - \frac{b}{m} \Delta\psi, \end{aligned}$$

$$\Delta\dot{\omega} = -\frac{k}{J} \sin \varphi_0 \Delta\varphi.$$

Подставляя во второе из этих уравнений значение величины $n^2 \omega_0^2$ из (131), получаем после простых вычислений

$$\Delta\dot{\psi} = -\frac{g \sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0} \Delta\varphi - \frac{b}{m} \Delta\psi + \frac{2g \sin \varphi_0}{\omega_0} \Delta\omega.$$

Характеристический многочлен полученной линейной системы уравнений для $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$, $\Delta\omega$ равен

$$D(p) = \begin{vmatrix} -p & 1 & 0 \\ -\frac{g \sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0} & -\frac{b}{m} - p & \frac{2g \sin \omega_0}{\omega_0} \\ -\frac{k}{J} \sin \varphi_0 & 0 & -p \end{vmatrix},$$

или после вычисления определителя и умножения на -1

$$-D(p) = p^3 + \frac{b}{m} p^2 + \frac{g \sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0} p + \frac{2kg \sin^2 \varphi_0}{J\omega_0}.$$

Все коэффициенты этого многочлена положительны, и потому необходимым и достаточным условием его устойчивости является (в силу теоремы 7) выполнение неравенства

$$\frac{b}{m} \cdot \frac{g \sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0} > 1 \cdot \frac{2kg \sin^2 \varphi_0}{J\omega_0},$$

или, иначе, неравенства

$$\frac{bJ}{m} > \frac{2k \cos \varphi_0}{\omega_0} = \frac{2F}{\omega_0} \quad (132)$$

(см. (131)). Соотношение (131) представляет собой в силу теоремы Ляпунова (теорема 11) *достаточное условие устойчивости* системы машина — регулятор.

Для того чтобы выяснить смысл правой части последнего неравенства, введем играющее важную роль в технике понятие *неравномерности хода* паровой машины. Из соотношений (131) видно, что при изменении величины $F = P - F_1 + k \cos \varphi^*$ (т. е. при изменении нагрузки P) меняется стабильная скорость ω_0 . Величина $\frac{d\omega_0}{dP}$ характеризует скорость изменения величины ω_0 при изменении нагрузки P , ее абсолютная величина $v = \left| \frac{d\omega_0}{dP} \right|$ (как мы сейчас увидим, производная $\frac{d\omega_0}{dP}$ отрицательна) и называется *неравномерностью хода* паровой машины. В силу (131)

$$F\omega_0^2 = \text{const},$$

и потому, дифференцируя, получаем

$$\frac{d\omega_0}{dF} = -\frac{\omega_0}{2F}.$$

Таким образом,

$$v = \frac{\omega_0}{2F}$$

и условие устойчивости (132) переписывается окончательно в виде

$$\frac{bJ}{m} \cdot v > 1. \quad (133)$$

Из формулы (133) Вышнеградским были сделаны следующие выводы:

1. Увеличение массы m шаров вредно влияет на устойчивость.

2. Уменьшение коэффициента трения b вредно влияет на устойчивость.

3. Уменьшение моментов инерции J маховика вредно влияет на устойчивость.

4. Уменьшение неравномерности v вредно влияет на устойчивость.

Чтобы сделать свои выводы доступными для инженеров и привлечь внимание к наиболее важным из них, Вышнеградский формулирует в конце работы свои знаменитые «тезисы».

Первый тезис. Катаrakt (трение) есть существенная принадлежность чувствительного и правильно действующего регулятора, короче: «без катаракта нет регулятора».

Второй тезис. Астатические регуляторы (т.е. регуляторы с нулевой неравномерностью) даже и с катарактом не должны быть употребляемы, короче: «без неравномерности нет регулятора».

Нарушения работы регуляторов в середине XIX столетия объясняются тем, что вследствие развития техники все четыре величины, входящие в соотношение (133), стали изменяться в направлении, ухудшающем устойчивость. Именно: ввиду увеличения массы заслонок (связанного с возрастанием мощности машин) стали применяться все более тяжелые шары. Совершенствование обработки поверхностей деталей приводило к уменьшению трения. Увеличение рабочей скорости машин сделало необходимым уменьшение момента инерции J маховика. Наконец, стремление уменьшить зависимость скорости от нагрузки приводило к уменьшению неравномерности хода.

Уяснив неблагоприятное влияние всех указанных факторов, Вышнеградский в своих тезисах рекомендует искусственное увеличение трения (при помощи специального устройства — катаракта) и увеличение неравномерности хода (путем изменения чисел n и k , зависящих от конструкции машины).

**КРАТКОЕ ЖИЗНЕОПИСАНИЕ
Л. С. ПОНТЯГИНА,
СОСТАВЛЕННОЕ ИМ САМИМ
(рождение 1908 г., Москва)¹⁾**

Теперь, когда мне 70 лет и я уже давно известный математик, хочется выяснить, когда же решился для меня вопрос о выборе профессии. Мне кажется, что до 13 лет вопрос о будущей профессии не интересовал меня и я не проявлял никакой особенной склонности к математике. Скорее меня интересовала техника: электрический мотор, вольтова дуга и другие предметы такого же рода представлялись мне очень интересными. Свое образование я начал в московском городском училище в 1916 г. Средства моих родителей не позволяли им поместить меня в гимназию. Моя мать была портнихой, а отец — счетовод по профессии — в то время был рядовым солдатом. Позже, после революции, я перешел в общую тогда для всех девятилетнюю среднюю школу.

После того как в 13 лет я полностью потерял зрение вследствие несчастного случая, вопрос о выборе профессии стал для меня очень серьезным и сложным. В первую очередь рассматривалась музыка, которой я занимался до окончания средней школы, но без всякого успеха ввиду полного отсутствия к ней способностей. Рассматривались, как возможные, и гуманитарные специальности, в частности история. Математика давалась мне тогда нелегко и мысль о ней

¹⁾ Публикуя эту статью, редакция предоставляет читателю возможность ознакомиться не только с представляющей большой интерес научной автобиографией выдающегося математика, но и с некоторыми его личными взглядами и оценками, касающимися различных сторон научной жизни в нашей стране, (Впервые опубликовано в УМН. — 1978, — Т. 33. — Вып. 6, — С. 7 — 21.)

как о возможной профессии вовсе не приходила в голову. Однако в 8-м и особенно в 9-м классе я уже очень серьезно заинтересовался математикой, так что к окончанию школы имел некоторое представление о высшей математике: знал, что такое декартовы координаты, с увлечением выводил уравнения кривых, умел дифференцировать и решал задачи на максимум и минимум. Но не имел ни малейшего представления о теории множеств и других «возвышенных» предметах. Свои познания высшей математики я черпал из чтения небольших книжечек и статей энциклопедических словарей. Особенно запомнилась мне статья профессора Л. К. Лахтина «Высшая математика» в многотомной энциклопедии Граната (изд. VII, т. 12, с. 66). Заканчивая школу, я уже был настолько увлечен математикой, что не мыслил себе другой профессии, так что единственно возможным высшим учебным заведением представлялся мне физмат Московского университета.

Три года тому назад, как член Редакционно-издательского совета (РИСО) АН СССР, я ознакомился с одной очень плохой книгой по высшей математике, написанной для начинающих. Это побудило меня заново прочитать упомянутую статью Лахтина, чтобы составить себе представление о том, на чем же учился я сам, будучи юношей. Статья Л. К. Лахтина вновь показалась мне очень хорошей, но слишком маленькой. Поэтому у меня возникло желание изложить основы высшей математики в том виде, в каком они были бы хороши для меня — юноши, используя для этого весь свой опыт педагога и ученого, накопленный за много лет. И я решил написать четыре небольшие популярные книжки под общим названием «Знакомство с высшей математикой». Первая из четырех книг под названием «Метод координат» уже вышла из печати. Вторая «Анализ бесконечно малых» уже почти закончена.

За свою жизнь я написал несколько книг по математике, числом всего шесть или семь. Мой собственный опыт писания книг, а также работа в РИСО привели меня к одному выводу, который кажется мне интересным. Вывод этот следующий: чем тщательнее пишется книжка, тем тоньше она получается и тем больше затрачивается труда на ее писание. Грубо говоря, если автор удваивает тщательность, то одно-

временно он вдвое уменьшает толщину книги и, следовательно, получает вдвое меньшую оплату за вдвое больший труд. Таким образом, оплата труда автора обратно пропорциональна квадрату качества выполненной работы. Этой любопытной закономерностью, возможно, объясняется появление в печати очень большого количества толстых научных книг. Толстую книжку легче написать, и денег получается больше.

Решив окончательно поступить на физмат МГУ и поступив туда в 1925 г., я, однако, вовсе не знал, что буду делать по окончании университета. Университетское математическое образование было в те времена совершенно неперспективным. Средние школы предпочитали тогда иметь в качестве преподавателей профессиональных педагогов. Высших школ было очень мало, а научно-исследовательская работа, требующая знания математики, велась в ничтожных размерах. Широкое развертывание высшего технического образования и научно-исследовательской работы началось лишь в 30-х годах и было связано с грандиозной индустриализацией Советского Союза, намеченной в пятилетних планах.

Несмотря на то, что поступление в университет в те времена сулило мало хорошего, оно было одновременно и очень трудным делом. Тогда жестко ставился вопрос о создании новой интеллигенции из рабочего класса. Поэтому для меня, происходящего из семьи служащего, поступление в вуз было трудным делом. Требовалось иметь так называемую командировку. Я надеялся получить ее от школы, как один из лучших учеников. И действительно, наша школа располагала в том году двумя командировками в вуз. В качестве одного из командимуемых она наметила меня. Но районо не захотело утвердить эту командировку, так как считало, что обучение в высшем учебном заведении для меня невозможно. Пришлось обратиться в Наркомпрос, где имел личные связи мой крестный. В результате я получил командировку в фонд ЦК РКП(б) и Главпрофобра, что давало мне практически возможность поступить в университет почти без экзаменов.

Став студентом университета, я первое время жестоко тосковал о школе и школьных товарищах. В эти первые дни мне сильно помог своим сердечным и теплым отношением ко мне очень молодой талантливый

преподаватель В. А. Ефремович. Скоро, однако, я нашел новых товарищей среди студентов и увлекся учебой. Слушал лекции, запоминал и понимал все сразу, никогда не записывая лекции. Я и сейчас считаю, что записывание лекций приносит только вред, так как отвлекает внимание слушателя от понимания предмета. Мой способ заключался в том, что, прослушав лекцию, я внимательно повторял ее в уме перед следующей лекцией по тому же предмету. Таким образом, к моменту сдачи экзаменов весь курс был известен мне почти наизусть.

Обладая незаурядными способностями к математике, я, однако, сосредоточил все свое внимание на изучении программы первого курса, в отличие от некоторых других студентов, которые уже на 1-м курсе слушали лекции А. Я. Хинчина, посвященные, кажется, теории множеств и теории функций действительного переменного. Мне казались достаточно интересными и содержательными лекции И. И. Жегалкина по анализу, лекции С. С. Бюшгенса по аналитической геометрии. Несколько тяготили меня лекции Д. Е. Меньшова по высшей алгебре из-за чрезмерной медлительности изложения, так что я минут за 20—30 вперед мог предвидеть то, что он скажет.

В течение четырех лет учебы я проводил целые дни в университете с раннего утра до позднего вечера и возвращался домой совершенно замученный и голодный: денег на столовую не было. После смерти отца в середине моего 2-го курса я стал добиваться стипендии и добыл ее, хотя и не без труда. Нужно заметить, что тогда лишь немногие получали стипендию. Стипендия 27 руб. не давала больших возможностей, зато студенты имели некоторые привилегии. Они получали бесплатный проезд на летний отпуск. Бесплатным проездом я пользовался для поездок на море уже начиная с 1927 г. После окончания 2-го курса мы ездили с матерью в Балаклаву, затем в Корсиз и, наконец, после 4-го курса, в Гагры. Стоимость месячного пребывания на море на двоих составляла, я думаю, рублей 100, и это была вполне доступная роскошь ввиду бесплатного проезда, который почему-то получала и моя мать.

Одно из неприятных воспоминаний времен учебы — это езда на трамваях из дома в университет и обратно. А путь был немалый. Трамваи тогда были

битком набиты людьми. В трамвай было трудно влезть и трудно было из него выбраться. Кроме того, трамваи очень часто застревали и подолгу стояли без движения. Случалось иногда, что среди пути кондуктор внезапно объявлял: «Трамвай дальше не идет; пассажиров прошу выйти». Тогда приходилось искать новый трамвай, что представляло для меня большие трудности.

Начиная со 2-го курса, я перестал ограничиваться обязательными занятиями, а стал слушать необязательные лекции и участвовать в необязательных семинарах, которые в те времена на физмате играли большую роль, давая очень существенную часть образования. Именно тогда я начал обучаться топологии, которая на много лет составила главный предмет моих научных занятий. Лекции и семинары по топологии вел П. С. Александров, занимавший тогда скромное положение доцента университета.

На 2-м же курсе я сделал попытку заняться аналитической теорией чисел, которой руководил А. Я. Хинчин. Эта попытка, однако, потерпела полную неудачу. Для того чтобы участвовать в семинаре Хинчина, я за несколько дней выучил теорию функций комплексного переменного, но недостаточно основательно. И на первом же занятии семинара задал глупый вопрос, на который получил от А. Я. Хинчина довольно холодный и несколько презрительный, на мой взгляд, ответ. Вообще, на семинаре Хинчина царил обстановка холодности. А сам предмет оказался для меня малодоступным.

Совсем другая обстановка, сердечная и теплая, была на занятиях П. С. Александрова. Занятия небольших групп студентов зачастую происходили у него на квартире, что придавало им особую интимность. И я вскоре подпал под его огромное личное обаяние, под которым находился в течение многих лет. В те времена П. С. Александров, насколько помню, около трех четвертей своего времени проводил за границей. Уезжал туда в начале лета и возвращался в конце следующего лета, привозя с собой новые идеи в области топологии. К началу моего 2-го курса П. С. Александров как раз вернулся из-за границы с новыми идеями в области комбинаторной топологии. Его лекции не отличались большой отделанностью, но зато содержали совершенно новый

материал, что придавало им особую свежесть. На его лекциях, будучи на 2-м курсе, я узнал теорему двойственности Александера, которая легла в основу моих первых результатов по топологии, полученных в конце 2-го курса.

Свой 3-й курс я провел без топологии, так как согласно описанной выше закономерности Павел Сергеевич находился за границей. Зато я слушал очень интересные лекции Д. Ф. Егорова по разным предметам и особенно понравившийся мне курс интегральных уравнений. На 3-м же курсе я заинтересовался тензорным анализом и римановой геометрией, слушая лекции В. Ф. Кагана и участвуя в его семинаре. Хотя сам предмет мне казался очень интересным, но лекции Кагана удручали меня своей чудовищной медлительностью, а мои попытки заняться самостоятельной научной деятельностью в этой области были встречены холодно и рассматривались на семинаре Кагана, по-видимому, как некое высокомерие студента, который сует свой нос куда не надо. Боюсь, что В. Ф. Каган судил о способностях студентов по своим собственным.

К началу 4-го курса П. С. Александров вернулся из-за границы и привез с собой еще профессора фрейлейн Эмми Нётер. Таким образом, на 4-м курсе я вновь вернулся к топологии и, кроме того, слушал лекции фрейлейн Нётер по современной алгебре. Лекции эти поражали своей отделанностью, отличаясь в этом смысле от лекций Александрова, но не были засушенными и казались мне очень интересными. Лекции свои фрейлейн Нётер читала по-немецки, но они были понятны ввиду необычайной ясности изложения. На первую лекцию этого известного немецкого математика собралось огромное количество народа. Закончив 4-й курс университета и защитив дипломную работу, я тем самым закончил университет. В те времена молодежь не мучили долголетней учебой. В средней школе полагалось учиться 9 лет, в университете — 4 года. Мне и сейчас кажется, что этого достаточно. Во всяком случае, к концу 4-го курса я уже получил острое отвращение к сдаче экзаменов.

Закончив университет, я в течение двух лет проходил университетскую аспирантуру под руководством П. С. Александрова. Это было время решительных преобразований: старая система аспирантуры с мно-

гочисленными огромными экзаменами разрушилась, новая еще не была заведена. Таким образом, в аспирантуре я просто занимался математикой, да еще получал 175 руб. стипендии, что радикально меняло мое материальное положение. Окончание аспирантуры за два года вовсе не означало, что я выполнил что-то досрочно или защитил диссертацию. Диссертаций тогда вовсе не было, просто начальство решило, что с меня хватит и перевело меня в сотрудники института математики при университете на зарплату 170 руб., так что я даже потерпел некоторый материальный ущерб. Правда, уже после первого года аспирантуры я стал доцентом университета с зарплатой 47 руб. и читал лекции совместно с О. Ю. Шмидтом. Лекции были посвящены абстрактной алгебре и теории групп. Читали мы их по очереди, правда, на каждой лекции присутствовали оба. В мои обязанности входило утром в день лекции сообщать О. Ю. Шмидту о предстоящей лекции. Но так как телефона у меня не было, моя мать ходила в аптеку и звонила к нему. До сих пор помню, какой страх я испытывал перед своей первой лекцией.

Различного рода страхи, связанные с профессиональной работой, всегда преследовали и продолжают преследовать меня теперь. Каждое новое начинание вызывает тревогу, так как неясно, справлюсь ли я с ним.

Незаконченная научная работа вызывает страх, что я вообще не сумею ее закончить и несколько лет тяжелого труда пропадут даром. Законченная научная работа вызывает страх тем, что в ней может обнаружиться ошибка. Все эти страхи перед возможной неудачей составляют тяжелую эмоциональную сторону профессиональной работы. Но в то же время они являются едва ли не главным стимулом к преодолению трудностей и к тщательному выполнению работы.

Только хорошо выполненная работа доставляет радость! Выполненная небрежно — она вызывает отвращение и постепенно вырабатывает в человеке аморальное отношение к труду.

Переход из аспирантов в научные сотрудники ничего практически не изменил в моей деятельности. Я просто занимался математикой, и потому сейчас мне трудно вспомнить, что когда было сделано. Я стал

заниматься топологией и алгеброй, точнее, теми вопросами, где эти две области математики переплетались между собой. Еще в аспирантуре под влиянием П. С. Александрова я занялся гомологической теорией размерности и по собственной инициативе продолжал занятия топологическими теоремами двойственности. Пользуясь гомологическими соображениями в теории размерности, я построил два двумерных компактных множества, топологическое произведение которых имело размерность три. Таким образом, была опровергнута старая гипотеза о том, что размерность топологического произведения равна сумме размерностей сомножителей. Этот мой результат так впечатлил П. С. Александрова, что он сказал мне: «Через 10 лет Вас выберут академиком». Предсказание не оправдалось: через 10 лет меня выбрали только членом-корреспондентом. Этот мой результат о размерности топологического произведения я сперва намеревался подарить одной студентке, к которой питал нежные чувства. Но потом мне стало его жалко и я подарил ей другой, похуже.

Стремясь получить наиболее полный результат, аналогичный теореме двойственности Александера, я построил группу гомологий компактного топологического пространства в виде непрерывной коммутативной компактной топологической группы, причем группа эта являлась группой характеров дискретной коммутативной группы. Этим я приблизился к теории характеров коммутативных топологических групп, которая позже была построена мною, и одновременно впервые столкнулся с объектами, в которых одновременно осуществлялись топологические и алгебраические операции.

К такого же рода объектам, но в более широкой постановке вопроса пришел также А. Н. Колмогоров. Он высказал уверенность, что множество, на котором одновременно определены топологические и алгебраические операции, причем алгебраические операции в нем непрерывны относительно имеющейся в нем топологии, должно быть сравнительно простой структуры, приближающейся к структуре классических объектов математики. На этом пути он пытался получить естественную аксиоматику пространств постоянной кривизны, т. е. евклидово пространство, пространство Лобачевского и пространство Римана. Пе-

редо мною А. Н. Колмогоров поставил интересную, находящуюся в том же круге идей задачу: изучить связные локально компактные алгебраические поля, необязательно коммутативные по умножению. Гипотеза А. Н. Колмогорова заключалась в том, что таковыми могут оказаться только поля действительных чисел, комплексных чисел и кватернионов. Через неделю после того как задача была поставлена, я сообщил П. С. Александрову, что она уже решена мною для случая полей, коммутативных по умножению. Сразу же после этого мы собрались на квартире П. С. Александрова втроем: он, А. Н. Колмогоров и я. С оттенком иронического недоверия Колмогоров сказал: «Ну, что же, Лев Семенович, я слышал, что Вы уже решили мою задачу. Послушаем Вас». Уже первое мое утверждение А. Н. Колмогоров объявил неверным, но я сразу же опроверг его. Тогда он сказал: «Да. По-видимому, задача оказалась много легче, чем я предполагал». Все остальное уже не вызвало сомнений. Для случая некоммутативных по умножению полей задача оказалась безмерно более трудной. На решение ее у меня ушел целый год. Но одна из наиболее существенных конструкций была употреблена мною позже для изучения коммутативных локально компактных топологических групп, что дало возможность построить для них теорию характеров — один из наиболее существенных моих результатов.

Радость от успехов в научной работе не могла заглушить постепенно нарастающую тревогу. Вопрос о том, для чего нужно все то, что я делаю, все упорнее вставал передо мной. Самая пылкая фантазия не давала возможности вообразить, что гомологическая теория размерности когда-нибудь найдет применение к технике, физике или вообще к чему бы то ни было реально существующему в окружающей нас материальной действительности. Эта тревога подогревалась общественным мнением, которое постепенно складывалось в математических кругах университета. Уже многие говорили, что нельзя заниматься только чистой математикой, не имея в виду никаких ее приложений. В разговорах с товарищами я и сам стал высказывать это мнение. И вот однажды, думаю, что это было в 1932 г., ко мне на квартиру без всякого предупреждения пришел молодой физик

Александр Александрович Андронов, которого я раньше совершенно не знал. Он сказал мне, что слышал о моем желании заняться прикладными вопросами математики и хотел бы мне рассказать кое-что. От него я впервые услышал о том, что такое фазовая плоскость, предельные циклы и другие аналогичные вещи. Он же утверждал, что все это находит применение в различных разделах техники, в частности в теории колебаний. С тех пор завязалась дружба между мною и А. А. Андроновым, которая продолжалась в течение 20 лет до самой его смерти. Все это время я был для А. А. Андропова консультантом-математиком. К сожалению, он ничего не рассказал мне о самих применениях математики. По-видимому, он не считал себя в праве отвлекать меня от моей математической деятельности. О приложениях мне пришлось узнавать самому уже после его смерти.

А. А. Андронов был не только выдающимся ученым, но и совершенно замечательным человеком. Его главной чертой, как мне кажется, было чувство ответственности за все происходящее в стране. Знакомство с ним и его влияние положили начало новому направлению в моих математических интересах. Это направление в конце концов взяло верх над всем остальным, так что я бросил свои занятия отвлеченными вопросами и занялся прикладными вопросами математики. Еще в самом начале знакомства с Александром Александровичем я сделал под его влиянием некоторые работы по дифференциальным уравнениям. Именно: рассчитал динамические системы, близкие к гамильтоновым, и принял участие в работе А. А. Андропова над грубыми системами дифференциальных уравнений. Далее моя деятельность в этом направлении стала пассивной. С группой своих университетских товарищей я дома изучал работы Пуанкаре о кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, работы Морса и книгу Биркгофа «Динамические системы». Впоследствии знание работ Пуанкаре и Морса оказало мне существенную помощь в моей работе. Книга Биркгофа, очень трудная и малопонятная, осталась без всякого употребления.

Во время войны, движимый чувством, что нужно делать хоть что-нибудь, что может найти применение, я активизировал свою работу в области приложений математики и сделал две работы. Одну по изучению

нулей элементарных трансцендентных функций и другую об эрмитовых операторах в гильбертовых пространствах с индефинитной метрикой. Эти работы были выполнены в Казани в эвакуации, приблизительно в 1942 г. Наконец, в 1952 г. я полностью перешел на прикладные вопросы математики, но об этом позже.

Столкнувшись впервые с непрерывными алгебраическими объектами при доказательстве общей теоремы двойственности типа Александера и при рассмотрении непрерывных алгебраических полей, я позже получил в этой области ряд важных результатов и построил общую теорию непрерывных групп. Эти результаты, дополненные известными классическими результатами, относящимися к группам Ли, были изложены мной в монографии «Непрерывные группы», которая появилась на русском языке в 1938 г. В 1939 г. она была уже переведена в Америке на английский язык. Эта первая написанная мною книга дала мне широкую известность как в Советском Союзе, так и за рубежом. За нее в 1940 г. я получил Государственную премию. Премия была получена очень ко времени, так как она оказалась для меня существенным материальным подспорьем во время войны. Перед войной и во время войны научные работники были обеспечены материально отнюдь не так хорошо, как теперь. Однако все же у меня имелись некоторые сбережения на сберкнижках, но получить их во время войны было невозможно, так как в каждый месяц можно было взять не более двухсот рублей с одной сберкнижки. Государственная же премия, помещенная на сберкнижке, оказалась в привилегированном положении. С нее можно было брать по тысяче рублей в месяц. Эти деньги шли на покупку масла и сахара по спекулятивным ценам в эвакуации в Казани. Мы уже не были вынуждены продавать на базаре свое барахло для того, чтобы удовлетворительно питаться.

В 1934 г. с визитом в Москве был выдающийся французский математик Эли Картан-старший. Не тот, который жив теперь, а его отец. Я внимательно слушал доклад Картана, точнее, его перевод доклада с французского на русский, который тут же шепотом производила для меня Нина Карловна Бари. В этом докладе была сформулирована очень заинтересовавшая

меня задача. Именно: задача нахождения чисел Бетти компактных групп Ли. Картан не мог решить ее, но считал, что она может быть решена методом рассмотрения кососимметрических форм на многообразии. Я решил эту задачу совершенно другим способом, опирающимся на метод Морса, который мне здесь пригодился. Этот способ нахождения чисел Бетти или, более точно, циклов в многообразиях, заданных при помощи многих уравнений, был применен мною позже к другим многообразиям, имеющим важное применение. Но об этом я буду говорить позже.

Задача нахождения чисел Бетти компактных групп Ли, сформулированная Картаном, была трудной задачей. Ее решение было большим моим успехом. Я изложил это решение на Международной топологической конференции в Москве в 1935 г. Этот мой доклад был замечателен для меня еще тем, что он был моим первым докладом на английском языке.

Еще в 1931 г. я вместе с матерью был приглашен в Америку на целый год, и хотя эта поездка не состоялась, но, готовясь к ней, я усердно изучал английский язык. Это знание английского языка, очень ограниченное, но в то же время очень активное, было впервые использовано мною в 1935 г. Далее оно заглохло, так как международные связи почти полностью прекратились на много лет. Позже, когда я стал ездить за границу, мои знания английского языка ожили и впервые в 1969 году я прочел на английском языке курс лекций в Стэнфордском университете. А затем, уже сравнительно непринужденно, стал употреблять английский язык как язык моих лекций за границей.

Занятия гомологической теорией размерности оказали большое влияние на выбор тематики моих научных занятий в области топологии. Главная задача гомологической теории размерности заключалась в нахождении гомологического эквивалента для теоретико-множественного определения размерности компактного множества. Эта очень трудная и интересная задача была позже решена П. С. Александровым, но до того я также старался ее решить. И в своих попытках решения пошел по ложному пути. Мне показалось, что для решения этой задачи нужно дать гомотопическую классификацию отображений $(n+k)$ -мерной сферы на n -мерную сферу. К тому времени,

когда я пришел к этому вопросу, он уже был решен Хопфом для $k=0$ и для $n=2$, $k=1$. Во всех этих случаях обнаружилось счетное число классов отображений $(n+k)$ -мерной сферы на n -мерную сферу. В 1936 г. в начале лета я решил эту задачу для $k=1$ и $k=2$. К моему удивлению, оказалось, что при $n \geq 3$ имеется лишь два класса отображений $(n+k)$ -мерной сферы на n -мерную сферу для указанных случаев. Этот результат так поразил меня, что и до сих пор 1936 г. кажется мне как бы отмеченным им.

Но 1936 г. отмечен для меня и другим важным событием. К этому времени трения в отношениях с моим учителем П. С. Александровым привели к тому, что я открыто взбунтовался против него. В то время Н. Н. Лузин подвергся резкой критике со стороны математической общественности. И мой бунт против П. С. Александра выразился в том, что, выступая на обширном собрании математиков против Н. Н. Лузина, я в довольно резкой форме указал на некоторые недостатки в действиях П. С. Александра. После моего выступления Павел Сергеевич подсел ко мне и поблагодарил меня за правильную критику в его адрес. С тех пор я почувствовал себя самостоятельным математиком, независимым от П. С. Александра. Но, хотя мы много раз сближались с ним и расходились по разным вопросам, мое подчиненное отношение к П. С. Александрову как к учителю прекратилось. Отношения между учителем и учеником в области науки всегда очень сложны. Но я думаю, что их естественное развитие приводит к тому, что ученик должен стать совершенно независимым от своего учителя.

Гомотопической классификацией отображений сферы размерности $n+k$ на сферу размерности n я занимался в течение длительного времени, но конкретных результатов для $k > 2$ не получил. Ряд общих соображений и важных связей, относящихся к этой проблеме, были получены мною к началу 50-х годов. Я прочел на эту тему годовой курс лекций зимой в 1950—51 г., причем сам П. С. Александров слушал меня. На основе этих лекций была написана большая статья, изданная в виде отдельной книжки трудов Стекловского ин-та в 1953 г. под названием «Гладкие многообразия и их применение в теории гомотопий». Еще до войны, пытаясь решать ту же проблему,

гомотопической классификации отображений сферы на сферу, я построил так называемые характеристические классы гладких многообразий, которые называют теперь классами Понтрягина. Расскажу об этом чуть подробнее.

Рассмотрим в евклидовом пространстве R^{k+l} размерности $k+l$ совокупность всех k -мерных ориентированных евклидовых подпространств, проходящих через некоторую фиксированную точку o . Эта совокупность естественным образом составляет многообразие, которое мы обозначим через H_{kl} . Если в нашем евклидовом пространстве расположено некоторое гладкое ориентированное многообразие M^k размерности k , то, ставя в соответствие каждой точке x многообразия M^k касательную к нему в точке x плоскость T_x и беря затем плоскость $T(x)$ из множества H_{kl} , параллельную плоскости T_x , мы получаем некоторое естественное отображение T многообразия M^k , ставящее его точке x в соответствие точку $T(x)$ многообразия H_{kl} . Это отображение T называется тангенциальным отображением многообразия M^k . Оказывается, что при l достаточно большом оно в гомотопическом смысле не зависит от способа погружения многообразия M^k в евклидово пространство. Таким образом, гомотопические инварианты отображения T являются инвариантами гладкого многообразия M^k . А для того чтобы найти эти гомотопические инварианты, нужно было вычислить гомотопии в многообразии H_{kl} . Это я и сделал, пользуясь тем же методом Морса, какой был употреблен мной для вычисления гомотопий в компактных группах Ли. Характеристические классы гладких многообразий не дали мне возможности решить задачу классификации отображений сферы в сферу. Но независимо от этого они нашли многочисленные приложения, полученные уже другими математиками. Один из основных вопросов, возникающих в связи с характеристическими классами многообразий, есть вопрос о том, являются ли они топологическими инвариантами многообразия M^k или же они зависят от выбора гладкости в нем. Этот вопрос мне не удалось решить. Много позже (в 1967 г.) он был положительно решен С. П. Новиковым.

Мое официальное положение ученого за 10 лет после окончания университета сильно изменилось.

В 1934 г. Академия наук была переведена из Ленинграда в Москву и в Москве появился Математический ин-т АН СССР им. В. А. Стеклова, кратко: Стекловский институт. Руководство Стекловского института в лице его директора И. М. Виноградова после переезда института в Москву пригласило меня перейти в институт полностью. Но мне было очень трудно расстаться с университетом, так что я тянул с ответом до тех пор, пока не согласились принять меня в институт и одновременно оставить меня в университете, где я продолжал свою педагогическую работу.

В 1935 г., когда я был приглашен туда, я плохо понимал, что такое Стекловский институт. В действительности он являлся тогда и продолжает быть теперь одним из главных мировых центров математики.

Создатель и бессменный руководитель Стекловского института И. М. Виноградов важнейшей своей задачей всегда считал подбор кадров института. Он стремился собрать у себя лучших молодых ученых. Таким образом, приглашение на работу в Стекловский институт было для меня высокой честью. Мои отношения с И. М. Виноградовым развивались очень медленно и сложно. Трения возникали всегда, когда я привлекал в институт новых сотрудников. Всякий раз И. М. Виноградов ожесточенно сопротивлялся, в результате чего каждая кандидатура подвергалась тщательному изучению. Это — общий метод Виноградова, который привел к малочисленности состава Стекловского института (всего примерно 150 сотрудников). Этим он очень выгодно отличается от большинства научно-исследовательских институтов, многие из которых уже при самом своем основании планируются на несколько сотен сотрудников. Стекловский институт оказывает существенное влияние на всю математическую жизнь нашей страны. Выборы новых членов Отделения математики АН СССР, присуждение Ленинских, Государственных и именных премий математикам, присвоение ученых степеней и званий по математике, международные отношения в области математики, издание книг по математике — вот неполный перечень вопросов, в которые может вмешиваться Стекловский институт, опираясь на своих сотрудников и в очень сильной степени на исключительно высокий авторитет своего директора.

Большинство сотрудников Стеклового института, и не только сотрудников, но и много других математиков обращаются за советом к И. М. Виноградову каждый раз, когда им предстоит принять серьезное решение.

В течение более 30 лет своего пребывания в институте я вовсе не принимал участия во всем этом, а занимался только математикой. Но начиная с 1969 г. я стал принимать участие в организационной работе, осуществляемой сотрудниками института и его директором. За прошедшие 10 лет я очень сблизился с И. М. Виноградовым и стал одним из его ближайших соратников.

В 1934 г. в СССР были введены ученые звания и степени. Для того чтобы присуждать ученые степени и звания, нужно было сразу же дать их некоторым уже достаточно известным к тому времени ученым, чтобы дальнейшую процедуру могли осуществлять ученые советы. Среди первых математиков, получивших ученую степень доктора без защиты диссертации, был и я. Кажется, одновременно я получил и звание профессора, тоже без всяких процедур.

Гораздо более значительное изменение в моем положении ученого произошло в 1939 г., когда я был избран членом-корреспондентом АН СССР. Как и теперь, выдвижение на выборы производилось тогда научными организациями. Будучи в то время активным членом Московского математического общества, я участвовал в выдвижении как в активной, так и в пассивной роли.

Незадолго до соответствующего заседания членам общества было сообщено, что по решению ЦК партии в академики будут выдвигаться только избранные в то время депутатами Верховного Совета С. Л. Соболев и Н. И. Мусхелишвили.

Так как сообщение о том, что это есть решение ЦК, не было официальным, то на заседании Математического общества оно было высказано как рекомендация партгруппы. И я позволил себе выступить с резкой обширной речью против этого предложения партгруппы. Во время самого заседания мое выступление не оказало никакого действия, и выдвинутыми кандидатами в академики оказались только С. Л. Соболев и Н. И. Мусхелишвили. Однако спустя короткое время мы узнали, что мое выступление все же сыгра-

ло роль. Оказалось, что никакого решения ЦК такого рода не было и потому выдвижение кандидатов на выборы в Академию наук было заново проведено Математическим обществом. На новом заседании Математического общества были выдвинуты кандидатами в академики не только Соболев и Мусхелишвили, но также А. Н. Колмогоров и я. Первые три действительно были выбраны академиками, а я был выбран членом-корреспондентом.

Случай, описанный мною здесь, указывает на то, с какой осторожностью нужно относиться к неофициальным сообщениям о том, что решение по некоему вопросу уже принято некой высокой организацией. Такого рода неофициальные сообщения могут возникать, конечно, и случайно. Но они могут также иметь своей целью дезинформацию. Такая дезинформация имела место совсем недавно по вопросу, о котором я не хочу здесь говорить подробнее. Она имела своей целью дезорганизацию работы советских математических органов, чтобы дать возможность иностранным антисоветским кругам осуществить свои антисоветские цели.

Два мои выступления: первое в 1936 г. с критикой Н. Н. Лузина и попутно П. С. Александрова и второе в 1939 г., направленное против решения партгруппы Московского математического общества, оба тщательно подготовленные и довольно резкие, быть может, даже агрессивные, были первыми проявлениями моего боевого духа в борьбе за правое дело. В течение следующих 30 лет эта борьба осуществлялась мною главным образом в форме редких публичных выступлений, которые, если и не достигали поставленной цели, все же приносили мне большое моральное удовлетворение. Позже деятельность эта приобрела более систематический характер в виде организационной работы. В 1969 г. я стал заниматься издательскими вопросами, а начиная с 1970 г. — международными делами.

Как я уже сказал ранее, поступив в Стекловский институт, я не оставил свою педагогическую работу на мехмате университета. Она была прервана только двумя годами военной эвакуации. До 1952 г. преподавание мое было сосредоточено почти полностью на необязательных предметах: комбинаторной топологии и непрерывных группах. Я читал спецлекции и вел

спецсеминары в этих областях, а также занимался подготовкой аспирантов. Педагогическая работа послужила хорошей основой для написания двух книг: первой, упомянутой уже ранее монографии «Непрерывные группы» и второй — «Основы комбинаторной топологии», которая была издана в 1947 г. Во второй книжке дается весьма сжатое изложение немногочисленных основных фактов из комбинаторной топологии. Точно так же на основе моих лекций в 1950—51 гг. была написана книжка «Гладкие многообразия и их применение в теории гомотопий».

Начиная с 1952 г. характер моей научной работы резко изменился, но до этого произошла война. И она, как для всякого советского человека, послужила для меня причиной тяжкого, мучительного изменения сложившегося образа жизни. Хотя задолго до войны я уже жил с ощущением надвигающейся грозной опасности, все же речь В. М. Молотова, из которой все узнали о начале войны, хотя она кончалась обнадеживающей фразой «...наше дело правое, враг будет разбит, победа будет за нами», вызвала у меня ощущение катастрофы. Страх перед надвигающейся неизвестностью толкнул меня на брак, который я никогда не смог в дальнейшем признать желанным. И это наложило мрачный отпечаток на мою личную жизнь. Хотя двухлетнее пребывание в казанской эвакуации сопровождалось большими бытовыми трудностями, все же не они составляли основной фон моих переживаний в то время. До грандиозной битвы на Курской дуге я не ощущал полной уверенности в нашей окончательной победе, и это делало всю жизнь какой-то призрачной и бесперспективной. Однако с пребыванием в эвакуации связаны у меня и некоторые положительные эмоции. Как ни странно, эвакуация дала мне более благоприятные условия для научной работы. Отсутствие педагогической работы и многочисленных заседаний привело к новым возможностям в смысле научных занятий. Тогда мною было получено несколько хороших результатов, причем работа над ними осуществлялась частично при стоянии в длинных очередях.

В 1952 г. характер моей научной работы круто изменился. Но эта перемена не была внезапной. Ей предшествовали три чрезвычайно важных обстоятельства, без которых перемена была бы невозможна,

Первое. Задолго до 1952 г. я уже чувствовал острую потребность в переходе к более прикладным задачам математики. И даже декларировал мои намерения об этом еще до войны, но это не привело ни к каким радикальным изменениям в моей деятельности. Второе. Появились три моих ученика: Е. Ф. Мищенко, Р. В. Гамкрелидзе и В. Г. Болтянский. Все достаточно способные, очень различные по характеру своего мышления, и они помогли мне совершить нелегкий поворот в моей научной работе. Третье. За два или один год до 1952 г. дирекция института в лице заместителя директора М. В. Келдыша и партийная организация института настойчиво потребовали от меня перехода к прикладным вопросам математики. Эти требования не показались мне оскорбительным вмешательством в мою работу, так как я сам был уверен в их справедливости. Решающую роль в этом переломе, однако, сыграл Е. Ф. Мищенко, который стал к тому времени моим близким товарищем. Мы вместе с ним катались на коньках, а по его инициативе также и на лыжах, поэтому его высказывания носили для меня характер дружеского совета. Сам он в то время занимался гомологической теорией незамкнутых множеств, что решительно не удовлетворяло его, так как при его ясном уме он хорошо понимал, что эти вопросы не только не могут иметь никаких приложений, но даже не находятся скольконибудь близко к основному руслу развития математики.

В 1952 г. осенью мы открыли в Стекловском институте семинар, еще совершенно не зная, что нам делать. Мы начали с изучения книжки А. А. Андропова по теории колебаний. Из нее мы узнали, что такое конденсатор, самоиндукция, сопротивление, ламповый генератор и ряд других вещей. Это придало нашей деятельности совершенно новый колорит. Мы поняли, что сами можем составлять дифференциальные уравнения технических приборов. И что составление этих уравнений должно являться неотъемлемой частью нашей деятельности. На нашем семинаре установилось твердое правило: каждый доклад начинался с рассказа о некотором техническом приборе, затем следовало его математическое описание при помощи дифференциальных уравнений и потом уже шло исследование дифференциальных уравнений, направленное на понимание физической работы прибора. Позже мы

стали привлекать в качестве докладчиков инженерно-технических работников, но никогда не позволяли им ставить перед нами чисто математические задачи, уже полученные ими ранее на основании изучения прибора. Надо сказать, что эта наша деятельность не вызвала ни сочувствия, ни поддержки со стороны близких мне тогда по личным отношениям математиков старшего поколения. П. С. Александров рассматривал ее как измену основной моей деятельности в области топологии, а А. Н. Колмогоров на одном из аспирантских экзаменов Е. Ф. Мищенко высказался резко презрительно об изучении работы лампового генератора.

Несмотря на это, мы твердо верили в правильность избранного нами пути и сравнительно скоро наткнулись на одну математически интересную задачу, возникающую в теории колебаний. Суть ее следующая. Физики, осуществляя математическую идеализацию физических приборов, как правило, отбрасывают малые величины. Иногда в результате такого отбрасывания возникают дифференциальные уравнения, которые уже не способны описать физическое явление. Таким образом, в процессе дальнейшего математического исследования приходится дополнительно использовать некоторые физические соображения. Именно так обстоит дело в том случае, когда отбрасываемые малые величины являются коэффициентами при производных старшего порядка. Так мы пришли к интересной математической задаче о дифференциальных уравнениях с малым параметром при высших производных. В этой области мною с Мищенко был получен ряд результатов, далее занявших внимание многих других математиков. Впрочем, мы не были пионерами в этой области. Такая же задача, только очень частная, уже рассматривалась А. А. Дородницыным. Стоит отметить, что на этом этапе наша совместная деятельность с Мищенко уже получила высокую оценку А. Н. Колмогорова. Другая важная задача, к которой мы пришли в результате поисков и общения с соответствующими специалистами, была дифференциальные игры и возникшая из нее задача оптимизации. Но об этом я не буду говорить здесь, так как доклад, посвященный этому вопросу, сделанный мною в декабре 1977 г. на Президиуме АН СССР, должен быть опубликован вслед за этой моей статьей.

Взгляды, накопленные за два года работы семинара, я решил сделать достоянием студентов мехмата. В связи с этим я заявил о своем желании читать обязательный курс обыкновенных дифференциальных уравнений на мехмате, в чем мне было невозможно отказать, и начал это чтение в 1954 г. Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко одновременно с другими преподавателями университета вели упражнения по этому курсу. Одновременно, вместе с Е. Ф. Мищенко и Р. В. Гамкрелидзе, мы развернули на мехмате широкую сеть семинаров, на которых стремились привить студентам нашу идеологию, заключающуюся в том, что приложения математики не только оправдывают ее существование, но и дают новые интересные задачи, которые невозможно вывести из глубины разума. Эта большая и очень трудоемкая работа продолжалась в течение трех лет, после чего была прекращена. Трудоемкость ее объясняется отчасти тем, что ни одного студенческого доклада мы не допускали на семинаре, не прорепетировав его тщательно перед семинаром с одним из руководителей.

Курс дифференциальных уравнений, который я начал читать на мехмате, включал некоторые не игрушечные, а вполне важные для техники применения дифференциальных уравнений, в том числе теорию Вышнеградского регулятора Уатта и теорию Андропова лампового генератора, основанную на использовании предельных циклов Пуанкаре. Кроме того, уже в самом начале, я рассказывал о линейных дифференциальных уравнениях с постоянными коэффициентами, имея в виду нужды ведущихся одновременно с курсом семинаров. Из-за этого имевшиеся в то время учебники были не годны для подготовки моего курса. Поэтому я очень боялся, что студенты не смогут благополучно сдать экзамен. Каждая лекция, тщательно подготовленная мною, после прочтения ее писалась мною в виде, готовом для печати. Таким образом, ко времени экзамена я имел уже готовую для ротационной публикации рукопись лекций. Но университетское издательство отказалось опубликовать ротационное издание моих лекций, а ректор Московского университета И. Г. Петровский, он же заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, «не сумел» уговорить директора университетского издательства, кажется Цейтлина, выполнить

эту работу. До экзамена оставалось 3—4 недели, а написанные мною лекции еще не нашли издателя. В конце концов лекции удалось опубликовать в каком-то другом ротاپринтном издательстве, но привезенные мною уже готовые 300 экземпляров лекций были свалены в деканате, а факультетская библиотека отказалась их принять ввиду их высокой стоимости. Пришлось устроить небольшой скандал Петровскому, после чего книжки были водворены в библиотеку и студенты, наконец, получили возможность готовиться к экзаменам. Наше вторжение в чужую для нас область обыкновенных дифференциальных уравнений, я имею в виду Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко и себя (все мы были топологами), не было встречено на мехмате с симпатией. И наша трехлетняя деятельность на мехмате была прекращена. Продолжать читать лекции мне не захотелось, а заменить себя кем-нибудь из двух упомянутых товарищей было невозможно — на это не согласился Петровский.

Тщательно переработанное мною ротاپринтное издание лекций было издано нормальным типографским образом в 1961 г. Издательством физико-математической литературы. Книга постепенно получила признание и в 1975 г. ей была присуждена Государственная премия как учебнику.

В том же 1961 г. была опубликована книга «Математическая теория оптимальных процессов» четырех авторов: Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, в которой излагались наши достижения в области теории управления. Она получила Ленинскую премию в 1962 г. Обе книги, после выхода их на русском языке, очень быстро были переведены в США на английский язык, причем вторая — двумя издательствами одновременно. Позже они были переведены на многие другие языки. Книга «Математическая теория оптимальных процессов» оказала в дальнейшем существенное влияние как на развитие вариационного исчисления, так и на теорию управления.

В 1958 г. я впервые поехал за границу. Организационный комитет Международного конгресса математиков в Эдинбурге пригласил меня сделать пленарный доклад по топологии, но я предложил им другую тему: «Математическая теория оптимальных процес-

сов». Доклад был тщательно отрепетирован. Я произносил его по-русски. Мищенко писал формулы, а профессор Липман Берс переводил по кусочкам на английский язык. В том же 1958 г., еще до конгресса, я был избран академиком. Это важное для меня событие не было, однако, сопряжено ни с какими волнениями, так как я был как-то очень уверен в том, что меня выберут. Это избрание было задумано и проведено И. М. Виноградовым. Точно так же мое избрание в 1939 г. членом-корреспондентом АН СССР не сопровождалось волнением, так как и тогда я был уверен в успехе.

В 1958 г. произошло еще одно очень важное для меня событие: я познакомился в Абрамцеве с Александрой Игнатьевной, врачом Института им. Склифосовского. Два года спустя она стала моей женой, моим другом и советником во всех моих делах. За два года знакомство переросло в хорошую человеческую дружбу, и к моменту брака мы уже довольно хорошо знали друг друга, нам никогда не было скучно вместе. Всегда было о чем поговорить. Помню один забавный разговор в 1959 г. Александра Игнатьевна в шутку спросила меня: «Когда же, Лев Семенович, вы собираетесь получить Ленинскую премию?». Я ответил ей: «В 1962 г.». Тогда она была поражена этим ответом и приняла его за шутку. Но после узнала, что мой ответ был основан на правильной оценке всей обстановки.

Мой первый брак был расторгнут за 10 лет до заключения второго.

В конце 1968 г., по некоторым причинам, я заинтересовался издательской работой. Точнее, работой Главной редакции физико-математической литературы издательства «Наука». Знакомясь со списками издаваемых книг, я был поражен однообразием имен авторов. Среди авторов почти полностью отсутствовали сколько-нибудь значительные ученые, а прочие авторы, составлявшие весьма узкий круг, отличались необычайной плодовитостью. Зная по собственному опыту, какого огромного труда требует написание книги, я пришел к мысли, что с изданием математических книг дело обстоит неблагоприятно. Издание книг упомянутой Главной редакции контролировалось в то время органом Академии наук — секцией РИСО под председательством Л. И. Седова. Я обра-

тился к нему с просьбой создать отдельный орган дополнительного или независимого контроля над изданием книг по математике. Л. И. Седов отнесся к моему предложению без сочувствия и не поддержал меня. Мне удалось получить поддержку председателя РИСО М. Д. Миллионщикова, а затем президента АН СССР М. В. Келдыша. Под их давлением Л. И. Седов вынужден был согласиться на допущение меня к реальному воздействию на издательскую работу. Мы с Л. И. Седовым составили письменное соглашение о правах возглавляемой мною группы математиков в области издания математической литературы. Эта бумага была передана М. Д. Миллионщикову для составления на ее основе имеющего юридическую силу документа за подписью президента М. В. Келдыша. Документ был исправлен мною с согласия Миллионщикова и в таком виде подписан М. В. Келдышем в декабре 1970 г. Так началась продолжающаяся до сих пор моя работа в системе РИСО, членом которого я стал. Мне кажется, что мне и группе моих товарищей удалось несколько улучшить издательское дело в области математики, хотя трудностей еще очень много. Главная из них заключается в привлечении квалифицированных и добросовестных авторов.

Несколько позже, по образцу математической, были организованы группы по физике, а затем по механике и теории управления. На мой взгляд, группы эти уже полностью выполняют всю работу контроля Академии наук над изданиями Главной редакции.

Почти в то же время пришлось заняться международными отношениями в области математики. Перед Международным конгрессом математиков в Ницце в 1970 г. в Исполком Международного союза математиков должен был быть избран советский представитель. Академик-секретарь нашего Отделения Н. Н. Боголюбов, по-видимому, уже обещал этот пост академику И. Н. Векуа, но председатель Национального комитета советских математиков И. М. Виноградов и президент АН СССР М. В. Келдыш решили иначе. Они рекомендовали меня, и на Ассамблее 1970 г. я был избран вице-президентом Международного союза математиков. Там же в Ницце произошло другое, немаловажное для меня событие. Я вновь делал пленарный доклад, на этот раз посвященный дифференциальным играм и уже на английском языке. Воз-

возможность сделать доклад на английском языке мне дала поездка в Стэнфордский университет в 1969 г., где я в течение полутора месяцев вынужден был читать лекции по-английски ввиду отсутствия переводчика. Эта деятельность была чудовищно мучительна для меня, но в то же время доставила большое удовлетворение, так как я преодолел трудности, связанные с английским языком.

В том же 1969 г. еще до поездки в Стэнфорд я был награжден Золотой Звездой Героя Социалистического Труда, что доставило мне большую радость тогда и доставляет некоторые удобства теперь.

Перспектива работы в Исполкоме Международного союза математиков очень пугала меня, главным образом из-за плохого знания английского языка. Поэтому на заседании Исполкома я стал ездить с А. Б. Жижченко. Оказалось, однако, что он стал не только переводчиком, но моим советником и соратником по работе в Исполкоме.

При проведении на Исполкоме советской точки зрения мы встречались иногда с серьезным сопротивлением некоторых членов Исполкома, но были и такие, которые дружественно поддерживали нас. Одна из наиболее серьезных проблем, которую пришлось решать, — это выработка предложений по новому составу Исполкома на период 1975—1978 годы.

Занявшись международными отношениями, я обнаружил, что круг математиков, допущенных к заграничным поездкам, весьма узок, аналогично тому, как был узок круг авторов математических книг. Думаю, что нам удалось несколько улучшить положение дел с поездками.

Нужно признать, что некоторые дела в области математики сильно запущены из-за нашей собственной беспечности и непонимания происходящего. К числу таких запущенных дел принадлежит положение с учебниками математики для средней школы. Реформа преподавания, произведенная 10—12 лет назад, привела его в катастрофическое положение, что недавно официально признало Бюро Отделения математики АН СССР на своем заседании от 10 мая сего года.

5 июня 1978 г.

Л. Понтрягин